Міністерство освіти і науки України
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

А.С. КОРХІН
І.Ю. ТУРЧАНІНОВА

ФІНАНСОВО-ЕКОНОМІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра економічної кібернетики та інформаційних технологій

МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІКИ

навчальний посібник

для студентів напряму підготовки 8.03050201 «Економічна кібернетика»

Дніпропетровськ
НГУ
2016

УДК 519.86 (075.8)
К 70

Рекомендовано Вченою радою ДВНЗ «НГУ» України як навчальний посібник для студентів напряму підготовки 8.03050201 «Економічна кібернетика» (протокол № 5 від 22.12.2015 р.)

Рецензенти:
Ю.І. Пилипенко, д-р техн. наук, проф. (НГУ, завідувач кафедри);
В.І. Прокопенко , д-р техн. наук, проф. (НГУ)

К70 **Моделювання економіки: навч. пос. / А.С. Корхін, І.Ю Турчанінова, – М-во освіти і науки України, Держ. вищ. навч. заклад «Нац. гірн. ун-т». – Д. : ДВНЗ «НГУ», 2016. – 104 с.**

Зміст видання відповідає освітньо-професійній програмі підготовки бакалаврів з напряму 8.03050201 «Економічна кібернетика» (галузевий стандарт вищої освіти України ГСВО ОПП-05) та програмі дисципліни «Моделювання економіки».

Розглянуті загальні питання моделювання об'єктів, зокрема математичного моделювання економічних явищ. Наведені основні засади теорії оптимізації з одним та багатьма критеріями, розглянуті теорія споживання, теорії виробника (фірми) та міжгалузевого балансу, односекторна модель економічної динаміки. Текст супроводжується прикладами та задачами для самостійного вивчення, що необхідно для отримання навичок та уміння бакалавра з економічної кібернетики.

ЗМІСТ

ВСТУП

В основу навчального посібника покладено багаторічний досвід кафедри економічної кібернетики та інформаційних технологій ДВНЗ «НГУ» з дисципліни «Моделювання економіки», яка викладається кафедрою, відповідно до навчального плану підготовки бакалаврів з економічної кібернетики на четвертому курсі (Економічна кібернетика - 6.030102).

Зміст навчального посібника відповідає вимогам галузевих стандартів вищої освіти України та програмі навчальної дисципліни «Моделювання економіки».

Головна ціль посібника – надати досить послідовний опис ряду загальних моделей, які в останній час отримали широке розповсюдження на практиці при вирішенні економічних задач.

Посібник складається з шести розділів. У висновку сформульовані вимоги до необхідних умінь студента після вивчення кожного з розділів посібника і по яким можна судити про ступінь досягнення учбових цілей.

В першому розділі посібника розглянуті загальні питання моделювання об’єктів, зокрема математичного моделювання економічних явищ. Спеціально введено другий розділ, у якому стисло надані теоретичні відомості про методи оптимізації, які застосовуються потім упродовж усього посібника. У третьому розділі розглянуті теорія споживання, зокрема функції попиту, функції корисності та пошук точки рівноваги за допомогою павутиноподібній моделі ринку. Четвертий розділ присвячується теорії виробництва. У ньому наведені виробничі функції, розглянуті питання конкуренції. П’ятий розділ містить в собі відомості про міжгалузевий баланс. В останньому розділі розглянута односекторна модель економічної динаміки (дискретний аналог моделі Солоу).

Текст супроводжується прикладами. У кінці розділів наведені індивідуальні задачі для самостійного вивчення, частина з яких була розроблена за участю д-ра технічних наук, професора В.А. Воронова, засновника дисципліни «Моделювання економіки» на кафедрі ЕКІТ. Виконання цих індивідуальних робіт необхідні для отримання навичок та уміння бакалавра з економічної кібернетики.

У посібнику є спеціальна позначка ◊ - позначка завершення.

1. МОДЕЛІ І ЇХ ВИДИ

1.1. Моделювання і його види

Розвиток науки тісно пов'язаний з побудовою і використанням різноманітних моделей. Нині їх число дуже велике, його важко навіть оцінити. Проте поняття "модель" досі не має загальноприйнятого формулювання. За останні п'ятдесят років цей термін почали використовувати усі: хіміки, лінгвісти, логіки, біологи, юристи, економісти і навіть журналісти (фотомодель).

Багато дослідників пропонують визначити "модель" як інструмент в поширеному методі дослідження, званому "моделювання".

Моделювання - це вивчення об'єктів дослідження не безпосередньо, а непрямим шляхом, за допомогою деяких допоміжних об'єктів, які прийнято називати моделями.

Моделювання як спосіб віддзеркалення дійсності зародився ще у античному світі, коли з'явилося наукове пізнання.

Існує багато способів класифікації методів моделювання. Розглянемо класифікації за засобами моделювання, а саме матеріальне і ідеальне моделювання.

Матеріальне моделювання - таке моделювання, коли дослідження ведеться на моделях, зв'язок яких з досліджуваними об'єктами має матеріальний характер. Приклади: *1) макети різноманітних типів* (макет житлового масиву в архітектурі); *2) фізичні моделі*, призначені для відтворення динаміки процесів в об'єкті, що вивчається. В цьому випадку фізична природа об'єкту і моделі однакові, наприклад, модель гідроелектростанції - велика споруда.

3) Аналогове моделювання, коли модель і об'єкт мають різну фізичну природу, але процеси, що відбуваються в моделі, описуються тими ж математичними співвідношеннями, що і в об'єкті, що вивчається. Як приклад можна послатися на вивчення механічних коливань за допомогою електричної системи, що описується тими ж рівняннями, що і механічна система. Яскравим прикладом такого типу моделювання є моделювання на аналогових обчислювальних машинах (АОМ). Швидкодія АОМ значно нижча, ніж у сучасних ЦОМ. Тому АОМ нині практично не використовуються.

Ідеальне моделювання. Воно принципово відрізняється від матеріального моделювання, оскільки ґрунтується не на аналогах об'єкту і моделях, а на ідеальному, мислимому зв'язку між ними. Методи ідеального моделювання досить умовно можна розбити на дві групи: формалізовані і неформалізовані моделі.

У *формалізованому моделюванні* моделями служать системи знаків або образів, разом з якими задаються їх правила перетворення і інтерпретацій. Якщо як моделі використовуються системи знаків, то таке моделювання називають *знаковим*. Знакові системи різні: креслення, графіки, схеми, формули і так далі. (За допомогою схеми, що зображує структуру управління фірмою, яка згідно із сказаним є моделлю, можна вирішувати питання раціональної структури управління.) Мережевий графік проектування деякої споруди – модель процесу виконання проекту.

Найважливішим видом знакового моделювання є *математичне моделювання*. При використанні цього виду моделюванні модель записується у вигляді сукупності формул, перетворення яких здійснюється на основі правил математики і логіки. Роль математичного моделювання, як в розвитку науки, так і практичній діяльності величезна.

Дослідження економічних процесів і явищ протягом довгого часу проводилося тільки на основі таких невизначених представлень (їх ще можна назвати якісними). Нині аналіз неформалізованих моделей залишається найбільш поширеним методом економічного дослідження (у науці і на практиці). Всяка людина, що приймає рішення без використання математичних моделей, вимушена керуватися тим або іншим описом ситуації, заснованому на досвіді (своєму або чужому) і на інтуїції. Основний недолік цього підходу являється те, що рішення може виявитися малоефективним або навіть помилковим. У буденному житті така помилка може бути допустимою, але при ухваленні економічних рішень великого масштабу втрати можуть виявитися великими.

Використання виключно неформалізованого моделювання стримує розвиток економічної науки, оскільки одна і та ж модель різними дослідниками може розумітися по-різному і призводити не лише до не співпадаючих, але мало не до протилежних виводів.

Сказане не можна розуміти так, що потрібно повністю перейти на застосування математичних моделей для ухвалення економічних рішень. Причини криються в недоліках математичних моделей: сучасний математичний апарат не всемогутній, методи математичного моделювання не завжди можуть конкурувати з неформалізованими методами по швидкості, легкості і дешевизні дослідження, сучасний математичний апарат не дозволяє врахувати багато чинників, що враховуються ОПР (особою приймаючою рішення), але що погано формалізуються. В зв'язку з цим згадаємо теорію нечітких множин, яка дозволяє формалізувати деякі неформальні представлення людини.

Таким чином, нині математичне моделювання в економіці можна розглядати як важливий і в перспективі незмінний інструмент, що дозволяє приймати більше обґрунтовані рішення, знижує і значно ризик помилок.

Помітимо, що неформалізоване моделювання дозволяє також контролювати результат математичного моделювання, знаходити і усувати помилки.

Таким чином, в сучасній економіці можна говорити про бажано хороше поєднання методів математичного і неформалізованого моделювання.

1.2. Раціональне господарювання і ведення економіки

Основним завданням економіки є раціональне господарювання, раціональна діяльність (economizing), тобто розподіл обмежених ресурсів для досягнення поставлених цілей. Внаслідок обмеження ресурсів доводиться вибирати той або інший варіант їх використання. До завдань, пов'язаних з раціональним господарюванням відносять, наприклад, розподіл доходу на меті споживання і збереження, розподіли загальної суми витрат на споживання між різними видами товарів і послуг.

Економіка в цілому є сукупністю певних інститутів, кожен з яких вирішує задачу раціонального господарювання, що стоїть перед ним. До числа таких інститутів входять:

Споживачі (домашні господарства): окремі особи або групи осіб із загальним доходом, що витрачається на споживання.

Фірми: підприємства (одноосібна власність, аукціонна суспільства), що виробляють товари і послуги.

Професійні спілки: групи людей, що працюють по найму, організовані для того, щоб укладати з підприємцями колективні договори або виконання певних завдань.

Урядові організації: політичні установи, що часто мають важливі економічні функції.

Економіку можна розглядати як науку про застосування методів раціональної діяльності господарських інститутів. Таким чином, економічна наука розглядає розподіл обмежених ресурсів в домашньому господарстві, фірмі і у ряді інших інститутів.

Отже, для усіх перерахованих інститутів може бути вказана функція мети, засоби (інструмент) управління, обмеження на ресурси і нормативні правила, регулюючі, наприклад, розподіл доходу між товарами і послугами.

2. ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ В ЕКОНОМІЦІ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ

Загальний вигляд задачі оптимізації:

$$\left.\begin{aligned} &f(x)\to\min, \\ &g_i(x)\le b_i, i=1,\dots,m, \end{aligned}\right\}, \qquad (2.1)$$

де x - n-мірний вектор, $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$f(x)$- функція мети,

$g_i(x)$- ліва частина i-го обмеження,

b_i - в економічних задачах наявність кількості i-го ресурсу.

В (2.1) $g_i(x)$- має кількість ресурсу i -го виду, яке треба витратити, щоб виробити продукції в кількості x.

Функція (2.1) є загальним виглядом задачі оптимізації, оскільки рішення задачі максимізації $f(x)\to\max$ співпадає з розв'язком задачі мінімізації $-f(x)\to\min$.

Якщо в задачі (2.1) відсутні обмеження, такі задачі називаються задачами на безумовний мінімум, інакше – задачами на умовний мінімум.

2.1. Задачі на безумовний мінімум

Загальний вигляд задачі на безумовний мінімум:

$$f(x)\to\min$$

Існування рішення задачі оптимізації задається такою названою необхідною умовою мінімуму, яку визначають за допомогою градієнта.

Градієнтом функції (позначимо його $\nabla f(x)$) називається вектор:

$$\nabla f(x)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \qquad (2.2)$$

його компонентами є приватні похідні $f(x)$ по $x_1,\dots,x_n$.

Градієнт функції вказує напрям найшвидшого зростання функції.

Антиградієнт функції – $\nabla f(x)$ вказує напрям найшвидшого убування функції.

Для розуміння геометричного сенсу градієнта розглянемо лінії рівного рівня $f(x)$.

Лінії рівного рівня – це такі лінії для точок, в яких значення функції однакове. Вони виходять перерізом функції площиною яка паралельна координатній площини, див. рис. 2.1.

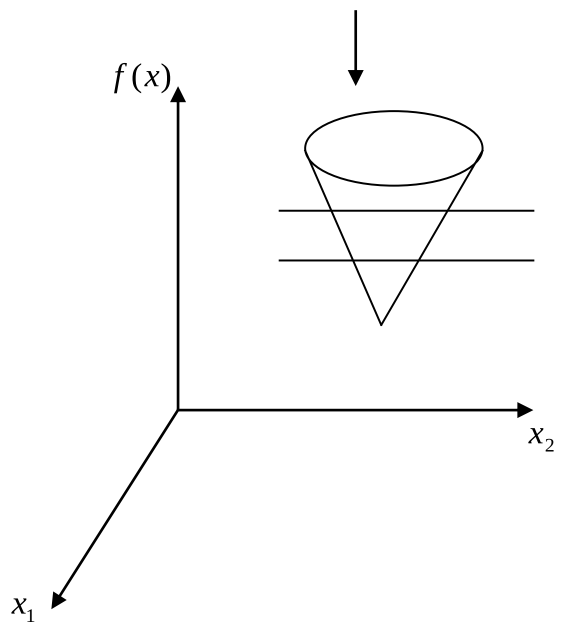

Рис. 2.1. Приклад ліній рівного рівня для одної змінної

Для випадку 2-х змінних лінії рівного рівня можуть мати вигляд:

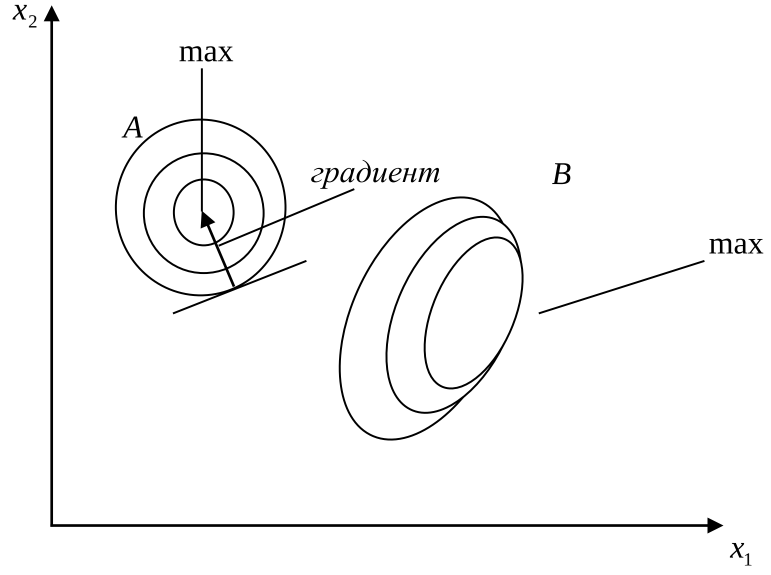

Рис. 2.2. Приклад ліній рівного рівня для випадку 2-х змінних

Градієнтом функції в деякій точці є нормаль до дотичної лінії рівного рівня в цій точці.

Градієнт є напрямом найшвидшого зростання функції.

Необхідною умовою мінімуму в задачі на безумовний тип являється рівність нулю градієнта функції.

$$\nabla f(x) = O_n, \tag{2.3}$$

де O_n – n-мірний нульовий вектор.

З формули (2.3) отримуємо:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 0, \\ &\vdots \\ &\frac{\partial f(x)}{\partial x_n} = 0 \end{aligned}\right\}.$$

2.2. Задачі на умовний мінімум

Такі задачі мають вигляд (2.1).

Розглянемо окремий випадок, коли в задачі знаходиться тільки рівність.

2.2.1. Задачі оптимізації з обмеженнями-рівністю

$$\left.\begin{aligned} &f(x) \to \min, \\ &g_i(x) \le b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}\right\}$$

Щоб отримати необхідну умову мінімуму, зведемо задачі оптимізації з обмеженнями-рівністю до задачі без обмежень за допомогою функції Лагранжа:

$$\begin{aligned} L = f(x) + \lambda_1(g_1(x) - b_1) + \lambda_2(g_2(x) - b_2) + \dots + \lambda_m(g_m(x) - b_m) = \\ = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(g_i(x) - b_i), \end{aligned} \tag{2.4}$$

де змінні $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – множники Лагранжа.

Необхідні умови для мінімуму

$$L(x, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \to \min, \tag{2.5}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}.$$

Функція Лагранжа залежить від вектору x и λ.
Необхідною умовою мінімуму задачі (2.5) буде:

$$\nabla_{x,\lambda} L = O_{n+m}$$

Із заданої умови виходить група умов:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \\ &\vdots \\ &\frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (2.6)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0, \\ &\vdots \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (2.7)$$

Спростимо (2.7):

$$\left.\begin{aligned} &g_1(x) - b_1 = 0, \\ &\vdots \\ &g_m(x) - b_m = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (2.7a)$$

Узявши похідні по множниках Лагранжа (2.7), отримали (2.7а).

<u>Приклад</u>

Нехай є задача:

$$\left.\begin{aligned} &f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \min, \\ &g_1(x) = x_1 + x_2 = 1, \end{aligned}\right\}$$

Знайдемо необхідні умови мінімуму для цієї задачі.

$$L = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1 (x_1 + x_2 - 1) \to \min$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 = 0, \\ &\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Звідси слідує $x_1 + x_2 - 1 = 0$.

Виразивши λ_1 через x_1:

$$\lambda_1 = -2x_1.$$

Підставивши λ_1 у систему рівнянь, отримали:

$$\begin{cases} 2x_2 - 2x_1 = 0, \\ x_1 + x_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Звідси слідує

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1, \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}5, \\ x_2 = 0{,}5. \end{cases}$$

Рішення вказаної системи рівнянь з трьома невідомими може дати точку, в якій знаходиться мінімум.

2.2.2. Випадки, коли є обмеження нерівності

Функція Лагранжа для задачі з обмеженнями-нерівностями (2.1) має вигляд:

$$L = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[g_i(x) - b_i \right] \to \min\,, \qquad (2.4)$$

Необхідна умова мінімуму для задачі оптимізації з обмеженнями-нерівностями складаються з двох частин: перша частина – це умови мінімуму функції Лагранжа (2.4) по x, ці умови мають вигляд функції (2.6), друга частина має умови:

$$\lambda_i \ge 0, \lambda_i \left[g_i(x) - b_i \right] = 0, \quad i = 1,\ldots,m, \qquad (2.8)$$

У відмінності від випадку, коли в задачі оптимізації є обмеженнями - рівність в даному випадку знак множника Лагранжа має бути не від'ємним згідно (2.8).

Якщо $\lambda_i = 0 \to g_i(x) - b_i = 0$, це означає, що i-ий ресурс використовується повністю.

$\lambda_i > 0 \to g_i(x) - b_i = 0$, це означає, що ресурс використовується повністю, ціна не нульова.

$\lambda_i = 0$, $g_i(x) - b_i = 0$, $g_i(x) \le b_i$, це означає, що використовували менше, ніж є.

2.3. Етапи рішення задачі оптимізації

Перший етап. Економічна постановка задачі.

На цьому етапі приводиться словесне формулювання критерію і обмежень, якщо вони є. Вказується за рахунок зміни яких величин можна набути оптимального значення функції мети (максимум або мінімум).

Другий етап. Формалізація поставленої задачі (розробка оптимізаційної математичної моделі).

Необхідно виконати такі роботи:

2.1) вибір шуканих змінних

2.2) запис формул обчислення функції мети, нових частин обмежень. Визначення правих частин обмежень (кількість наявних ресурсів).

2.3) запис програм обчислення функції мети і лівих частин обмежень в кодах, використовуваних програмних продуктів, наприклад, для Excel ці програми пишуться у відповідних осередках робочого листа.

2.4) чисельне рішення на комп'ютері.

Випадки, коли відсутнє або є рішення задачі оптимізації.

В цілях управління розглянемо випадок, коли є дві змінні x_1 і x_2, тобто n=2 також в цілях спрощення вважатимемо, що функція мети і ліві частини обмежень лінійні функції x.

Розглянемо випадки, які можуть бути в процесі рішення задачі оптимізації:

1) Функція мети необмежена (прагне до +∞ або -∞). Надбудова *Пошук рішення* видає повідомлення: «значение целевой ячейки не сходятся».

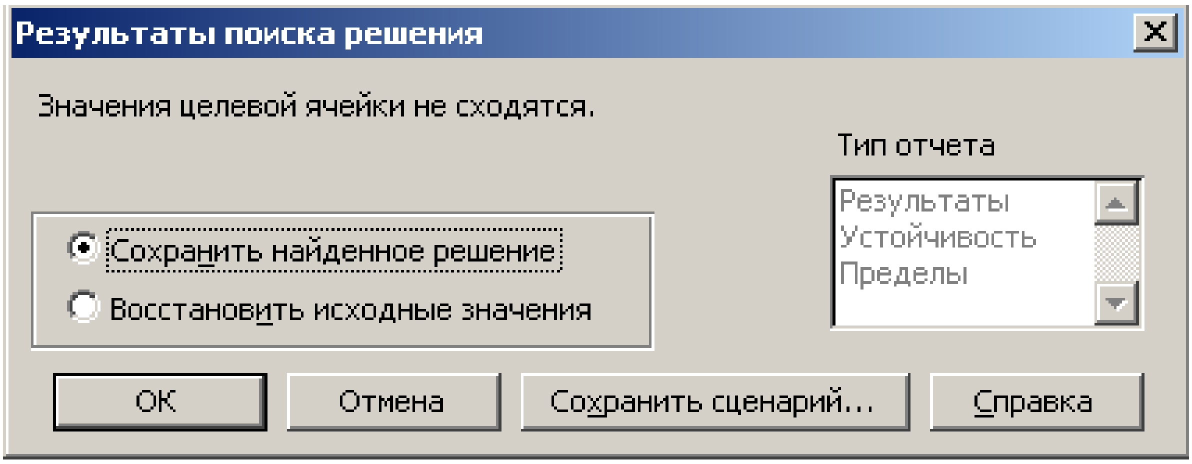

Рис. 2.3. Вікно надбудови *Пошук рішення*

Щоб вирішити задачу, в цьому випадку, необхідно ввести одне або декілька обмежень (див. рис. 2.4.). На ньому наведено два обмеження (1, 2), які утворюють область допустимих рішень, завдяки якій можливо, також знаходження максимального і мінімального значення функції цілі.

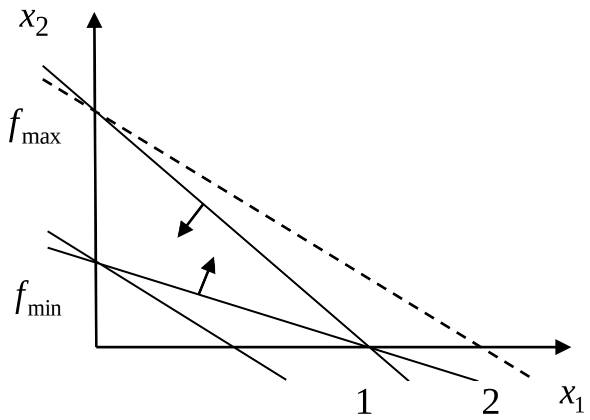

Рис. 2.4. Графічне зображення оптимізаційної задачі

2) Допустима область (ДО) не існує. Повідомлення *Пошук рішення*: "Поиск не может найти подходящего решения".

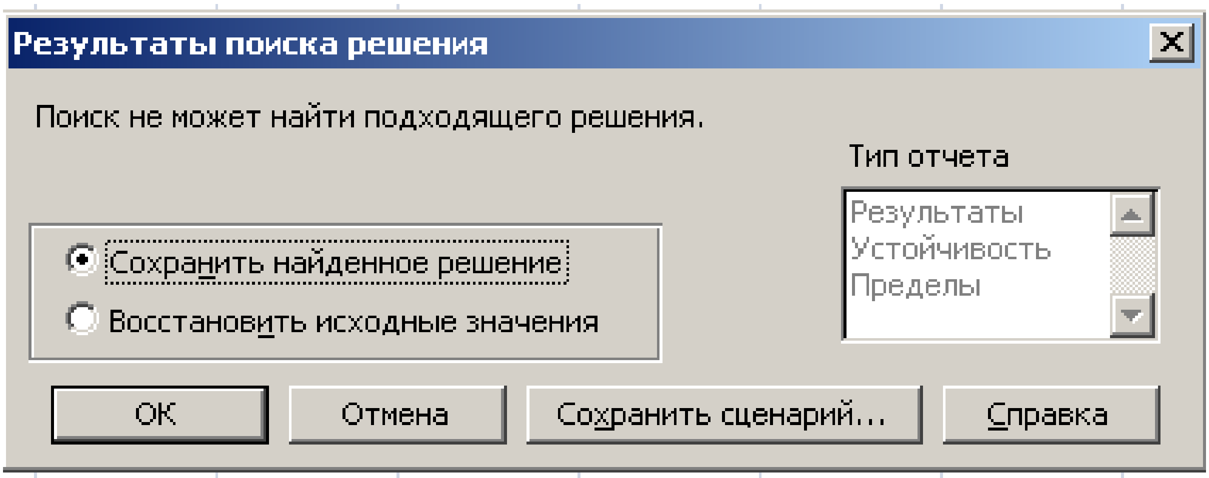

Рис. 2.5. Вікно надбудови *Пошук рішення*

Згідно (рис. 2.4) для того, щоб не було допустимої області достатньо змінити області дії обмежень на протилежні. А щоб з'явилася допустима область необхідно, наприклад, збільшити праву частину другого обмеження.

Якщо перевернути обмеження 2 паралельно самому собі, так щоб воно зайняло положення 2а, тоді ДО з'явиться (див. рис. 2.6.).

З економічної точки зору така дія означає: ресурс, що задається обмеженням 2 - збільшений. Потім може бути знайдений ресурс рішення.

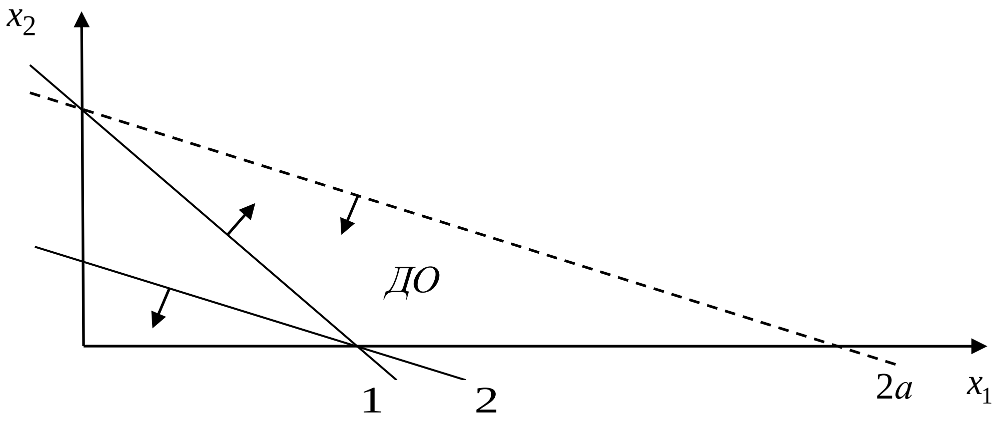

Рис. 2.6. Графічне зображення оптимізаційної задачі

3) У разі, коли оптимальне рішення отримане, маємо повідомлення *Пошуку рішення*: "Решение найдено. Все условия оптимальности выполнены" (рис. 2.7.).

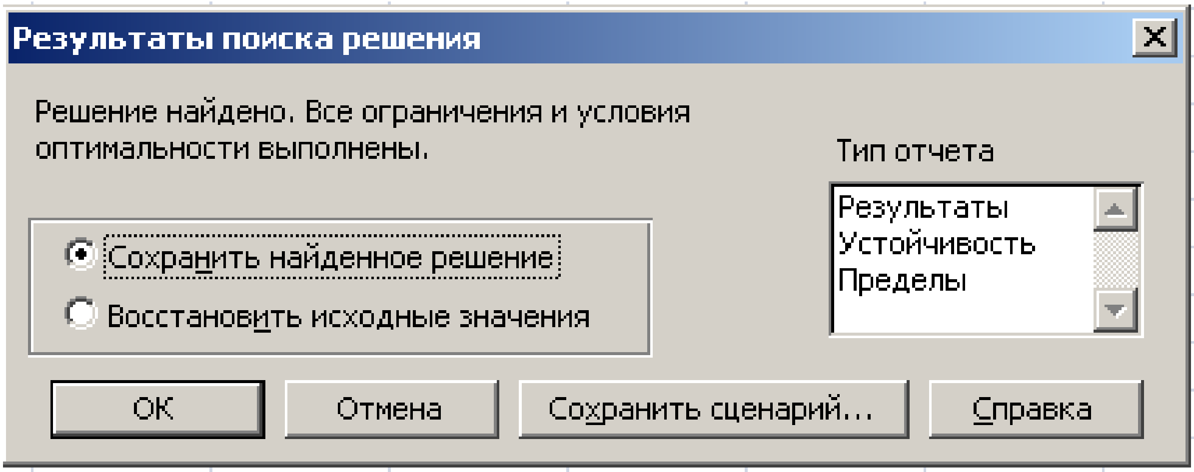

Рис. 2.7. Вікно надбудови *Пошук рішення*

4) Якщо є повідомлення: "Результат совпадает с текущим решением", то отримано рішення знаходиться в допустимій області, тобто задовольняє усім обмеженням, проте рішення - не оптимальне.

2.4. Багатокритерійна оптимізація

Розглянемо в цілях спрощення задачу з двома критеріями:

$$f_1(x) \to \min\,,\ \ f_2(x) \to \min\ .$$

Прикладом двохкритерійного задачі є випадок, коли перший критерій означає мінімум собівартості готової продукції, другий - мінімум шкідливих відходів виробництва. Ці критерії f_1, f_2 суперечливі, оскільки мінімум - означає собівартість готової продукції, веде до збільшення шкідливих відходів виробництва, тому що зменшення цих відходів вимагає витрат на устаткування для очищення відходів.

Розглянемо детальніше сенс багатокритерійної оптимізації, коли є тільки одна незалежна змінна. На рис. 2.8. показаний випадок, коли критерії не суперечливі.

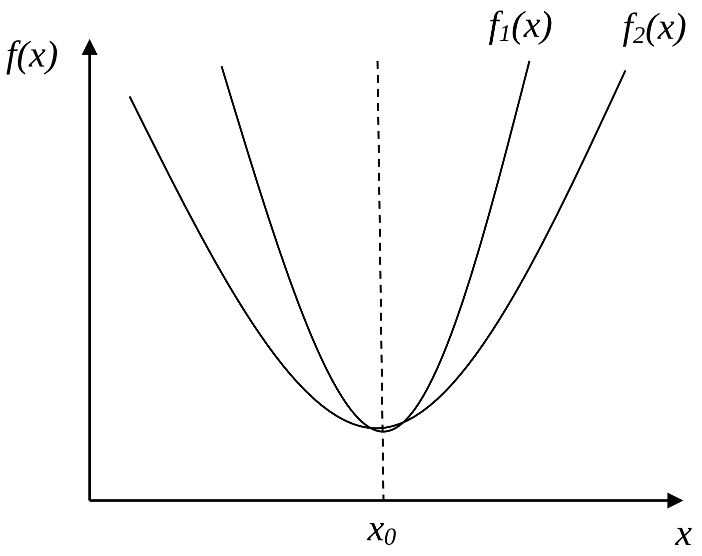

Рис. 2.8. Багатокритерійна оптимізація з не суперечливими критеріями

Для випадку на рис. 2.8, коли критерії не суперечливі, якщо досягається *min* функції $f_1(x_0)$ в точці x_0, то в цій же точці величина іншого критерію $f_2(x)$ також буде *min*. Отже, критерії не суперечливі. Це двохкритерійна задача виразилася в одинкритеріну задачу.

Розглянемо випадок, коли критерії суперечливі (див. рис. 2.9)

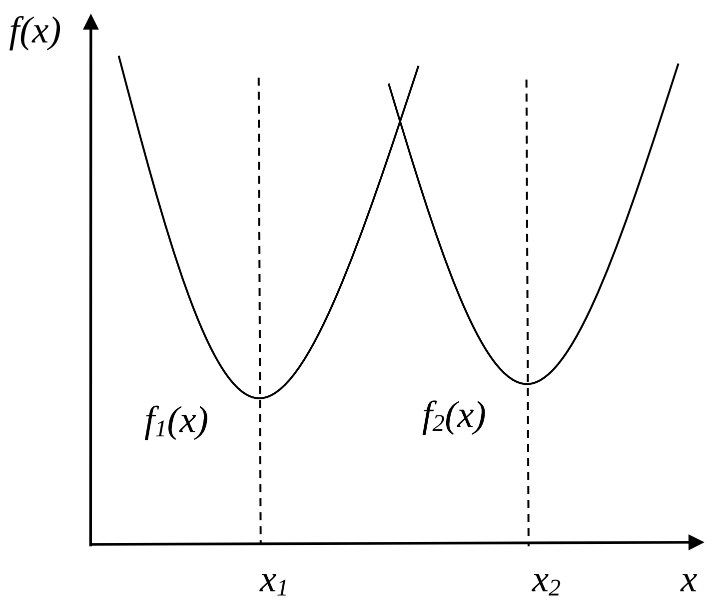

Рис. 2.9. Багатокритерійна оптимізація з суперечливими критеріями

Усі значення x менше x_1, при зменшенні x погіршуватимуть обидва критерії (ці критерії збільшуватимуться, а ми шукаємо *min*), така ж картина і для усіх x, які збільшують x_2.

Розглянемо відрізок $[x_1, x_2]$ - тут знаходиться, так звані не поліпшуванні рішення. Якщо, наприклад, рухатися від точки x_1 управо, то величина першого критерію збільшуватиметься, а другого зменшуватиметься.

Аналогічна картина буде, якщо рухатися ліворуч від точки x_2 - в цьому випадку другий критерій поліпшуватиметься, зате перший критерій погіршуватиметься.

Відрізок $[x_1, x_2]$, де знаходяться не поліпшуванні (ефективні, оптимальні по Парето рішення), називають договірною лінією.

Застосовне рішення двохкритерійної задачі x_0 належить $[x_1, x_2]$.

Вибір єдиного оптимального по Парето рішення, тобто визначення точки рішення на договірній лінії в загальному випадку повинна робити ОПР (особа, що приймає рішення).

Розглянемо випадок, коли є дві шуканих змінних: x_1 і x_2.

На рис. 2.10 приведені криві рівного рівня для функцій $f_1(x_1, x_2)$ і $f_2(x_1, x_2)$.

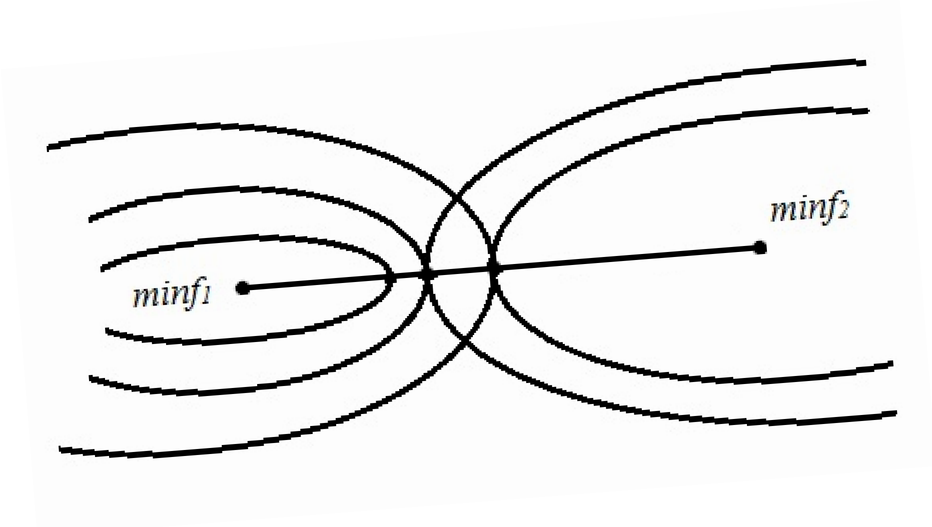

Рис. 2.10. Криві рівного рівня для функцій $f_1(x_1, x_2)$ і $f_2(x_1, x_2)$.

Багатокритерійна задача відрізняється від однокритерійної тим, що має нескінченну кількість рішень.

Розглянемо принцип рішення двохкритерійних задач.

Є два підходи до рішення таких задач:

1. Підхід полягає в тому, що обидва критерії згортаються в один (виходить один критерій).

$$\begin{cases} f_1(x) + rf_2(x) \to \min \\ g_i(x) \le b_i, i = 1,\ldots,m \end{cases}, \tag{2.9}$$

де $r \ge 0$ - коефіцієнт згортки, він приводить другий критерій до першого.

Кожному значенню r в задачі (2.9) за певних умов відповідатиме одне рішення оптимальне Парето.

2. Підхід називається метод поступок.

В цьому випадку другий критерій обмежується.

Виходить задача:

$$\begin{cases} f_1(x) \to \min \\ f_2(x) \le \Delta \\ g_i(x) \le b_i, i = 1,\ldots,m \end{cases} \tag{2.10}$$

Змінюючи Δ в (2.10) можна отримати різні рішення задачі оптимізації по Парето. Цей метод застосовується, коли можна виділити головний критерій.

2.5. Індивідуальне завдання №1

Визначення оптимального плану випуску продукції косметичною фірмою.

Студент повинен розв’язати наведену нижче задачу, вибравши дані для розрахунків (з табл. 2.1) за своїм номером у журналі групи.

Визначити оптимальну виробничу програму.

Вивчити принципи і методи розробки економіко-математичних моделей з використанням методів нелінійної оптимізації. Навчитися вирішувати задачі такого класу в Excel за допомогою функції "Пошук рішення".

2.5.1. Постановка задачі. Підприємець імпортує трояндову олію, яку використовує для виробництва крему для загару двох видів K_1 і K_2. Ціна продажу кремів залежить від кількості виробленого крему. Позначимо: x_1 і x_2 кількості кремів у (кг.) відповідно виду K_1 і K_2.

Тоді ціни 1 кг крему у грн. будуть такі:

$p_1 = a_1 - x_1$, $0 \le x_1 \le a_1$ (крем K_1), $p_2 = a_2 - x_2$, $0 \le x_2 \le a_2$ (крем K_2).

Собівартість виробництва у (грн.) x_1 (кг) крему K_1 і x_2 (кг) крему K_2 обчислюється по формулі: $C(x_1, x_2) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2$.

Припустимо, що попит на креми обох видів необмежений.

Скільки кілограмів кремів обох видів треба виробити, щоб прибуток був максимальний? Визначити ціни продаж кремів. Дані для розрахунків наведені у табл. 2.1.

Таблиця 2.1.

Розрахункові дані

№ варіанту	a_1	a_2	b_1	b_2	b_{12}
1	120	150	1,2	16	1,4
2	125	155	1,25	17	1,45
3	130	160	1,3	18	1,5
4	135	165	1,35	19	1,55
5	140	170	1,4	20	1,6
6	145	175	1,45	21	1,65
7	150	180	1,5	22	1,7
8	155	185	1,55	23	1,75
9	160	190	1,6	24	1,8
10	165	195	1,65	25	1,85
11	170	200	1,7	26	1,9
12	175	205	1,75	27	1,95
13	180	210	1,8	28	2
14	185	215	1,85	29	2,05
15	190	220	1,9	30	2,1

№ варіанту	a_1	a_2	b_1	b_2	b_{12}
16	195	225	1,95	31	2,15
17	200	230	2	32	2,2
18	205	235	2,05	33	2,25
19	210	240	2,1	34	2,3
20	215	245	2,15	35	2,35

Реалізація в Excel.

1. Створити таблицю з формулами, які пов'язують план, обмеження і цільову функцію.

2. Запустити програму *Пошук рішень* командою *Дані / Аналіз / Пошук рішення* (В Excel 2007) *Сервіс / Пошук рішення* (В Excel 2003 і нижче). В полях *Встановити цільову комірку*, *Змінюючи осередки*, *Обмеження* вводимо відповідні адреси осередків. Натиснути кнопку *Виконати* і у вікні *Результати пошуку рішення* вивести звіт по стійкості. Провести аналіз даних. Зробити висновки.

2.6. Індивідуальне завдання №2

Визначення оптимального плану випуску продукції гірсько-збагачувальним комбінатом.

Студент повинен розв’язати наведену нижче задачу, вибравши дані для розрахунків (наведені у табл. 2.2) за своїм номером у журналі групи.

2.6.1. Постановка задачі. З метою підвищення ефективності роботи гірсько-збагачувального комбінату проводяться спеціальні дослідження. На підставі зібраного статистичного матеріалу, поданого в табл. 2.2, для різних варіантів, необхідно знайти:

- оптимальний обсяг продажів концентрату (тис. тон)
- ціну концентрату (тис. грн./тона)
- прибуток (тис. грн.)
- загальні витрати (грн.) при максимальному прибутку.

2.6.2. Методичні вказівки. Насамперед, за даними табл. 2.2 знаходяться зв'язки між ціною C і обсягом продажів Y, а також між витратами I і обсягом продажів у виді рівнянь регресії:

$$C = a_0 + a_1 y \tag{2.11}$$

$$I = b_0 + b_1 y + b_2\, y^2 + b_3\, y^3 \tag{2.12}$$

Далі модель оптимізації будується в такий спосіб.

Знаходиться доход

$$D = Cy \tag{2.13}$$

і прибуток

$$P = Cy - I = (a_0 + a_1 y)y - b_0 - b_1 y - b_2\, y^2 - b_3\, y^3 \tag{2.14}$$

Очевидно, оптимальний обсяг продажів знаходиться з рівняння:

$$\frac{dP}{dY} = a_0 + 2a_1 y - b_1 - 2b_2 y - 3b_3\, y^2$$

$$a_0 - b_1 + 2y(\, a_1 - b_2\,) - 3b_3\, y^2 = 0.$$

Нехай це значення y^*.

Тоді оптимальна ціна, витрати, доход і прибуток можна визначити підстановкою y^* відповідно у формули (2.11)-(2.14).

Таблиця 2.2

Розрахункові дані

№ п\п	Обсяг продажів Y тис. т.	Ціна C тис. грн.	Витрати I грн.
Вариант №1			
1	25,569	2,431	2,61
2	23,424	4,576	1,87
3	24,634	3,366	2,27
4	25,391	2,609	2,54

№ п\п	Обсяг продажів *Y* тис. т.	Ціна *C* тис. грн.	Витрати *I* грн.
5	24,995	3,005	2,40
6	25,399	2,601	2,55
7	23,653	4,347	1,94
8	25,913	2,087	2,75
9	23,508	4,492	1,90
10	25,219	2,781	2,48
11	26,218	1,782	2,87
12	23,417	4,583	1,87
13	24,455	3,545	2,21
14	26,954	1,046	3,18
15	23,030	4,970	1,76
16	24,598	3,402	2,26
17	24,709	3,291	2,29
18	24,718	3,282	2,30
19	25,333	2,667	2,52
20	25,028	2,972	2,41
Вариант №2			
21	26,186	1,814	2,85
22	23,073	4,927	1,77
23	24,787	3,213	2,32
24	24,706	3,294	2,29
25	24,370	3,630	2,18
26	25,085	2,915	2,43
27	24,506	3,494	2,22
28	24,435	3,565	2,20
29	21,353	6,647	1,31
30	25,420	2,580	2,55
31	22,738	5,262	1,67
32	27,538	0,462	3,44
33	21,694	6,306	1,40
34	26,121	1,879	2,83
35	23,800	4,200	1,99
36	26,464	1,536	2,97
37	24,856	3,144	2,35
38	26,654	1,346	3,05
39	23,146	4,854	1,79
40	23,368	4,632	1,86
Вариант №3			
41	24,959	3,041	2,38
42	25,838	2,162	2,72
43	22,684	5,316	1,66
44	26,704	1,296	3,07
45	25,835	2,165	2,71
46	24,245	3,755	2,14

№ п\п	Обсяг продажів *Y* тис. т.	Ціна *C* тис. грн.	Витрати *I* грн.
47	23,231	4,769	1,82
48	26,992	1,008	3,20
49	24,013	3,987	2,06
50	25,248	2,752	2,49
51	24,171	3,829	2,11
52	23,997	4,003	2,05
53	23,169	4,831	1,80
54	24,164	3,836	2,11
55	22,905	5,095	1,72
56	24,507	3,493	2,22
57	26,667	1,333	3,06
58	23,218	4,782	1,81
59	23,999	4,001	2,05
60	25,583	2,417	2,62
Вариант №4			
61	24,063	3,937	2,08
62	27,292	0,708	3,33
63	25,363	2,637	2,53
64	24,938	3,062	2,38
65	23,932	4,068	2,03
66	21,317	6,683	1,31
67	23,138	4,862	1,79
68	26,113	1,887	2,83
69	24,501	3,499	2,22
70	24,563	3,437	2,24
71	24,478	3,522	2,21
72	25,356	2,644	2,53
73	27,209	0,791	3,29
74	21,814	6,186	1,43
75	25,634	2,366	2,64
76	24,026	3,974	2,06
77	22,643	5,357	1,65
78	24,074	3,926	2,08
79	24,371	3,629	2,18
80	26,346	1,654	2,92
Вариант №5			
81	22,854	5,146	1,71
82	24,804	3,196	2,33
83	25,322	2,678	2,52
84	25,280	2,720	2,50
85	25,166	2,834	2,46
86	25,047	2,953	2,42
87	25,258	2,742	2,49
88	24,623	3,377	2,26

№ п\п	Обсяг продажів *Y* тис. т.	Ціна *C* тис. грн.	Витрати *I* грн.
89	26,397	1,603	2,94
90	25,201	2,799	2,47
91	24,038	3,962	2,07
92	22,467	5,533	1,60
93	23,178	4,822	1,80
94	24,748	3,252	2,31
95	26,743	1,257	3,09
96	24,604	3,396	2,26
97	24,841	3,159	2,34
98	24,854	3,146	2,35
99	23,573	4,427	1,92
100	24,982	3,018	2,39
Вариант №6			
101	23,925	4,075	2,03
102	24,058	3,942	2,07
103	25,475	2,525	2,57
104	24,766	3,234	2,31
105	23,898	4,102	2,02
106	25,304	2,696	2,51
107	24,579	3,421	2,25
108	24,929	3,071	2,37
109	24,678	3,322	2,28
110	25,311	2,689	2,51
111	25,441	2,559	2,56
112	25,771	2,229	2,69
113	24,398	3,602	2,19
114	27,218	0,782	3,30
115	22,595	5,405	1,63
116	24,959	3,041	2,38
117	25,882	2,118	2,73
118	24,382	3,618	2,18
119	26,022	1,978	2,79
120	25,475	2,525	2,57
Вариант №7			
121	26,352	1,648	2,92
122	26,710	1,290	3,07
123	23,338	4,662	1,85
124	25,723	2,277	2,67
125	25,973	2,027	2,77
126	27,324	0,676	3,35
127	26,427	1,573	2,95
128	24,782	3,218	2,32
129	24,292	3,708	2,15
130	23,904	4,096	2,02

№ п\п	Обсяг продажів *Y* тис. т.	Ціна *C* тис. грн.	Витрати *I* грн.
131	25,640	2,360	2,64
132	23,097	4,903	1,78
133	25,309	2,691	2,51
134	26,923	1,077	3,17
135	26,961	1,039	3,18
136	24,853	3,147	2,35
137	23,262	4,738	1,82
138	25,092	2,908	2,43
139	25,554	2,446	2,60
140	22,215	5,785	1,53
Вариант №8			
141	22,472	5,528	1,60
142	23,837	4,163	2,00
143	24,367	3,633	2,18
144	22,107	5,893	1,50
145	24,822	3,178	2,33
146	26,192	1,808	2,86
147	24,996	3,004	2,40
148	24,068	3,932	2,08
149	25,536	2,464	2,60
150	26,701	1,299	3,07
151	27,198	0,802	3,29
152	24,022	3,978	2,06
153	24,022	3,978	2,06
154	24,156	3,844	2,11
155	25,079	2,921	2,43
156	24,108	3,892	2,09
157	24,320	3,680	2,16
158	25,460	2,540	2,57
159	23,092	4,908	1,77
160	24,086	3,914	2,08
Вариант №9			
161	24,643	3,357	2,27
162	23,032	4,968	1,76
163	26,640	1,360	3,04
164	25,932	2,068	2,75
165	22,632	5,368	1,64
166	24,761	3,239	2,31
167	24,853	3,147	2,35
168	25,360	2,640	2,53
169	24,839	3,161	2,34
170	25,146	2,854	2,45
171	24,413	3,587	2,19
172	24,862	3,138	2,35

№ п\п	Обсяг продажів *Y* тис. т.	Ціна *C* тис. грн.	Витрати *I* грн.
173	23,263	4,737	1,83
174	23,642	4,358	1,94
175	24,818	3,182	2,33
176	25,184	2,816	2,47
177	25,417	2,583	2,55
178	25,591	2,409	2,62
179	27,134	0,866	3,26
180	26,287	1,713	2,90
Вариант №10			
181	25,459	2,541	2,57
182	25,168	2,832	2,46
183	23,888	4,112	2,02
184	24,949	3,051	2,38
185	23,548	4,452	1,91
186	25,118	2,882	2,44
187	23,808	4,192	1,99
188	24,904	3,096	2,36
189	23,377	4,623	1,86
190	25,276	2,724	2,50
191	26,312	1,688	2,91
192	22,669	5,331	1,65
193	23,274	4,726	1,83
194	25,784	2,216	2,69
195	25,343	2,657	2,52
196	25,940	2,060	2,76
197	23,916	4,084	2,03
198	25,537	2,463	2,60
199	25,940	2,060	2,76
200	23,432	4,568	1,88

2.7. Індивідуальне завдання №3 Складання оптимального інвестиційного портфелю цінних паперів в умовах невизначеності

Студент повинен розв'язати наведену нижче задачу, вибравши дані для розрахунків (з табл. 2.3) за своїм номером у журналі групи. В учбовому посібнику [2, розділ 9] наводиться матеріал про ряди розподілу.

2.7.1. Постановка задачі і метод вирішення. Нехай інвестор має P грн. Він хоче вкласти їх в цінні папери двох видів $i=1{,}2$. Дохід за рік від однієї акції є випадкова величина, на яку впливає багато факторів. Позначимо x_i, $i=1{,}2$ частину коштів P, яка йде на придбання акцій i-го виду. Таким чином,

$$x_1 + x_2 = 1, \quad 0 \le x_i \le 1, \; i = 1{,}2. \qquad (2.15)$$

Позначимо дохід від 1 грн. коштів, що вкладені в акції першого виду E_1, а другого - E_2. Обидві ці величини згідно зі сказаним вище є випадковими. Їх середні значення відповідно R_1 і R_2. Увесь прибуток від вкладення коштів в акції:

$$D = (x_1 P)E_1 + (x_2 P)E_2,$$

де в дужках позначено кількість грошей на придбання акцій: $(x_1 P)$ - першого і $(x_2 P)$ - другого видів.

Величина D є випадковою. Якщо її поділити на детерміновану величину P, то отримаємо дохід на 1 грн. коштів вкладених в акції:

$$d = x_1 E_1 + x_2 E_2, \qquad (2.16)$$

де $d = D / P$.

Величину d треба максимізувати. Але така постановка задачі не є коректною, тому що d - випадкова величина, яка варіює. Тому потребуємо, щоб середня величина d була не менше величини c - мінімального прибутку, який інвестор вважає для себе прийнятним. Позначимо середню величину d як $M\{d\}$, де $M\{\ \}$ - символ математичного очікування (середньої величини). З (2.16) отримуємо:

$$M\{d\} = x_1 R_1 + x_2 R_2. \qquad (2.17)$$

Враховуючи обмеження на $M\{d\}$, що потребує інвестор, витікає

$$x_1 R_1 + x_2 R_2 \ge c. \qquad (2.18)$$

Це обмеження вводиться з-за того, що випадкова величина d не завжди задовольняє нерівності (деякі її реалізації можуть бути менше c)

$$d = x_1 E_1 + x_2 E_2 \ge c. \qquad (2.19)$$

Очевидно, чим менше $D\{d\}$ - дисперсія d, тим більше ймовірність того, що нерівність (2.19) буде виконуватися. В ідеалі, якщо $D\{d\} = 0$, умова (2.19) буде завжди виконуватися.

Таким чином, виберемо частини коштів x_1 і x_2 так, щоб

$$D\{d\} \to \min . \qquad (2.20)$$

Визначимо у явному вигляді залежність $D\{d\}$ від x_1 і x_2. Можна показати, спираючись на формули (2.17) і (2.19), що

$$D\{d\} = M\left\{(d - M\{d\})^2\right\} = x'Kx = \sigma_1^2 x_1^2 + 2\sigma_{12} x_1 x_2 + \sigma_2^2 x_2^2 . \qquad (2.21)$$

У формулі (2.21) прийняти такі позначення:

вектор $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, матриця розмірності 2×2 $K = M\left\{(E-R)^2\right\} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$.

Тут вектори $E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$. Матриця K зветься коваріаційною матрицею випадкового вектора доходів від одної акції E. Її елементи мають такий сенс:

σ_1^2 - дисперсія випадкового відхилення річного доходу від 1 грн., що вкладена в акції першого виду, від його середньої величини;

σ_2^2 - те ж саме для одної акції другого виду;

σ_{12} - коваріація річних доходів від 1 грн., що вкладена в акції обох видів, характеризує у якій ступені зміни доходів від двох видів акцій пов’язані друг з другом.

Виходячи зі сказаного сформулювати оптимізаційну задачу визначення величин x_1 і x_2 та вирішити її в Excel за допомогою *Пошуку рішення*.

Таблиця 2.3

Розрахункові дані

№ варіанту	R_1	R_2	c	σ_1^2	σ_2^2	σ_{12}
1	0,06	0,02	0,03	0,09	0,06	0,02
2	0,07	0,03	0,04	0,09	0,07	0,03
3	0,08	0,04	0,05	0,09	0,08	0,04
4	0,09	0,05	0,06	0,09	0,09	0,05
5	0,1	0,06	0,07	0,09	0,1	0,06
6	0,11	0,07	0,08	0,09	0,11	0,07
7	0,12	0,08	0,09	0,09	0,12	0,08
8	0,13	0,09	0,1	0,09	0,13	0,09
9	0,14	0,1	0,11	0,09	0,14	0,1
10	0,15	0,11	0,12	0,09	0,15	0,11
11	0,07	0,04	0,05	0,09	0,09	0,06
12	0,1	0,08	0,09	0,09	0,1	0,07
13	0,11	0,06	0,1	0,09	0,12	0,09
14	0,12	0,08	0,11	0,09	0,13	0,1
15	0,08	0,04	0,06	0,09	0,08	0,05

Необхідно знайти два варіанти рішення:

1) усі елементи матриці K мають елементи, що наведені у табл. 2.3;

2) елемент матриці K $\sigma_{12} = 0$, решта її елементів така, як у табл. 2.3.

Потім потрібно зіставити рішення по обох варіантах. Зробити висновки.

3. ТЕОРИЯ СПОЖИВАННЯ

3.1 Простір товарів

Поведінка споживача, що розглядається з точки зору раціонального господарювання, математично виражається у виборі деякої точки з простору товарів. Під товаром розумітимемо деяке благо або послугу, що поступили в продаж в певний час у визначеному місці. Припустимо, існує кінцеве число готівкових товарів n, кількості кожного з них, спожиті споживачем, характеризуються набором товарів x,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

де x_j, $j=\overline{1,n}$ - кількість j -го блага придбаного деяким споживачем.

З метою спрощення вважатимемо, що може бути куплена будь-яка не від'ємна кількість блага (товару). Тоді усі можливі набори товарів є векторами простору товарів $\tilde{N} = R_n^+$, тобто $x \in C$, $R_n^+ = \{x : x \geq 0, x \in R^n\}$.

Таким чином, C - невід'ємний ортант в n-мірному просторі (замкнута і опукла множина).

3.2 Відношення віддання переваги

Вибір споживачем деякого набору товарів частково залежить від його смаків. Вони характеризуються слабким відношенням віддання переваги, або слабим відданням переваги: "прийнятніше чим" або "рівноцінний", яке записується далі як «$\succ=$».

Отже, запис

$$x \succ= y, \tag{3.2}$$

де x і y - набори товарів (точки простору C), означає, що даний споживач віддає перевагу набору x перед набором y, або не робить між ними відмінностей: x, принаймні, так само хороший, як і y.

Визначимо тепер поняття байдужності. Набори товарів x і y байдужі для споживача ($x \sim y$) тоді і тільки тоді, коли кожен має перевагу або байдужий по відношенню до іншого, тобто:

$$x \sim y, \text{ якщо і тільки якщо } x \succ= y \ \ i \ \ y \succ= x \tag{3.3}$$

Споживач віддає перевагу набору над x набором y ($x \succ y$), якщо і тільки якщо x віддає перевагу або байдужий y, а y не віддає переваги або не байдужий x:

$$x \succ y, \text{ якщо і тільки якщо } x \succ= y, \text{ а відношення } y \succ= x \text{ невірно} \tag{3.4}$$

Відношення в просторі товарів називається *досконалим відношенням,* якщо для будь-яких наборів товарів x і y із C справедливо:

$$\text{або } x \succ= y, \text{ або } y \succ= x, \text{ або } (x \succ= y \text{ и } y \succ= x \text{ одночасно}) \quad (3.5)$$

Співвідношення (3.5) означає, що в C немає "пропусків", в яких переваги не існує.

Відношення називається *транзитивним відношенням* (*напіввпорядкованим*), якщо, для будь-яких трьох наборів, y і z із C виконується умова:

$$\text{якщо } x \succ= y,\ y \succ= z, \text{ то } x \succ= z \quad (3.6)$$

Відношення називається *рефлексивним відношенням*, якщо $x \prec= x$.

Відношення називається *симетричним відношенням*, якщо $x \succ= y$ тягне $y \prec= x$.

Розглянемо дві основні аксіоми про слабке відношення переваги.

Аксіома 1. Слабке відношення віддання переваги є досконалою напіввпорядкованістю простору товарів C.

Аксіома стверджує, що для довільних x і y в C справедливі формули (3.5), (3.6). З аксіоми 1 можна набути наступні властивості відношення еквівалентності. Це відношення:

- транзитивне: якщо $x \sim y, y \sim z$, то $x \sim z$;
- рефлексивне: $x \sim x$ (будь-який набір товарів еквівалентний сам собі);
- симетричне: $x \sim y$ означає $y \sim x$.

Відношення байдужності ділить простір товарів C на класи еквівалентності, звані безліччю байдужності, кожне з яких складається з усіх наборів, байдужих заданому набору x.

Сказане можна записати так: безліч байдужності для товару x:

$$I_x = \{y : y \sim x, x, y \in C\} \quad (3.7)$$

Введемо поняття *множин яким віддається перевага і таких, яким не віддається перевага.*

Множина, якій відається перевага – це множина, що складається з наборів товарів, яким віддається перевага або байдужість, заданим набором *x.*

$$P_x = \{y : y \succ= x, x \in C, y \in C\} \quad (3.8)$$

Множина, якій не відається перевага - множина, яка складається з тих наборів товарів, які відають перевагу вектору товарів *x* або байдужі до нього:

$$NP_x = \{y : x \succ= y,\ x \in C,\ y \in C\}. \tag{3.9}$$

Аксіома 2. Слабке відношення віддавання переваги безперервне.

Згідно з аксіомою 2 відношення віддавання переваги безперервне, тобто множини яким віддається перевага і такі, яким не віддається перевага є замкнутими множинами в просторі C, тобто містять свої граничні точки. Причому

$$I_x = P_x \cap NP_x. \tag{3.10}$$

Формула (3.10) означає перетин множини якій віддається перевага з множиною якій не віддається перевага.

З двох основних аксіом досконалої напіввпорядкованості і безперервності, витікає, що існує безперервна функція вектору товарів x, яку позначимо $U(x)$. Функція $U(x)$ називається функцією корисності. Для неї справедливо:

$$U(x) \geq U(y), \text{ якщо і тільки, якщо } x \succ= y. \tag{3.11}$$

Вважатимемо $U(x)$ такою, що диференціюється і такою, що градієнт функції $U(x)$ позитивний:

$$\nabla U(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_n} \end{bmatrix} > 0 \tag{3.12}$$

.

Співвідношення (3.12) означає, що усі приватні похідні $\dfrac{\partial U(x)}{\partial x_i} > 0$, $i = \overline{1,n}$, тобто зі збільшенням кількості товарів, функція корисності збільшується. Приватні похідні $\dfrac{\partial U(x)}{\partial x_i}$, $i = \overline{1,n}$, називаються *граничними корисністями*.

Далі розглянемо аксіому *строгої опуклості*. Нехай x і y - різні набори товарів в C, причому $y \succ= x$, тоді

$$\alpha y + (1-\alpha)x \succ= x, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{3.13}$$

Згідно (3.8) та (3.13) $\alpha y + (1-\alpha)x \in P_x$.

На рис. 3.1 зображено множина переваг P_x, що задовольняє цій аксіомі відповідно для n=1, 2.

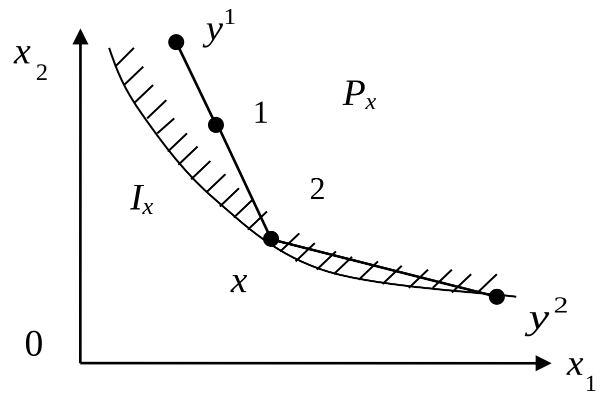

Рис.3.1. Множина переваг P_x

Точка 1 визначається виразенням $\alpha y^{(1)} + (1-\alpha)x$, точка 2 - виразенням $\alpha y^{(2)} + (1-\alpha)x$.

На рис. 3.1 межа множини P_x - є множина байдужості I_x, яка є *кривою байдужості.* Як видно, з рис. 3.1 множина P_x - строго опукла. Тоді можна показати, що множина

$$P_a = \{U(x) \geq a,\ x \in C\ \}, \tag{3.14}$$

також опукла для будь-якого речового a.

Розглянемо як приклад рис. 3.2. На ньому зображено для $n=1$ (простір товарів - одновимірний) множина P_a, яка є заштрихованою частиною числової осі (осі x-ів). З рис. 3.2 видно, що множина P_a опукла для будь-якого a.

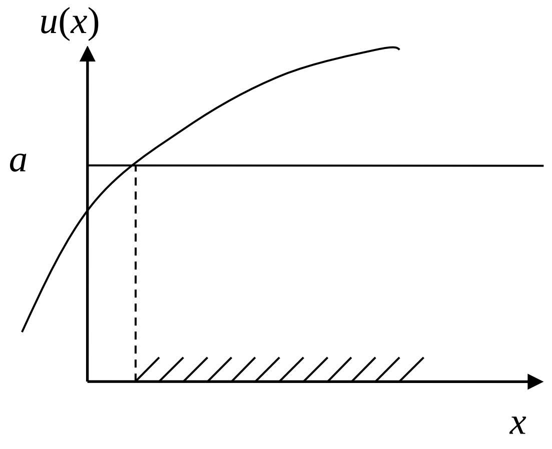

Рис.3.2. Множина P_a для одномірного простору

Для ілюстрації виду множини P_a в двовимірному випадку (розмірність простору товарів $n=2$) нам знадобиться поняття ***лінії рівного рівня*** функції

$U(x)$ с числом аргументів більше одиниці. Пояснимо це поняття, коли у функції є два аргументи.

Розтинатимемо цю функцію площинами, паралельними координатній площині $x_1 0 x_2$. Спроектуємо лінії перетину функції з площинами на координатну площину, див. рис. 3.3.

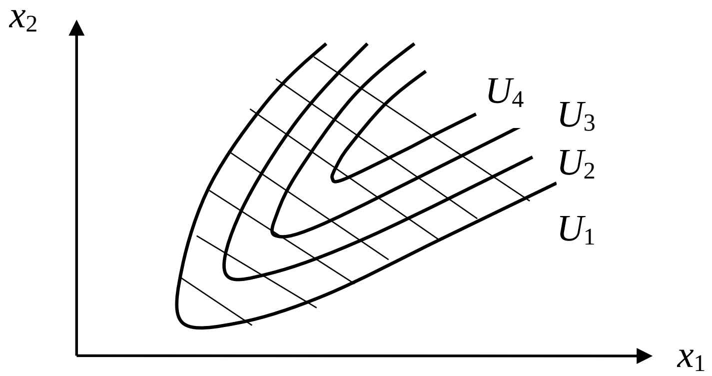

Рис.3.3. Вид множини P_a в двовимірному випадку

Ці проекції називаються лініями рівного рівня. На кожній такій лінії значення функції корисності однакове. На рис. 3.3 приведені криві для значень $U(x)$: U_1, U_2, U_3, U_4.

Крива байдужості є лінією рівного рівня для функції $U(x)$. Без втрати спільності вважатимемо, що $U_1 = a$, де величина a фігурує у формулі (3.14). Через властивість строгої опуклості $U(x)$ має місце наступними нерівностями $U_1 > U_2 > U_3 > U_4$. Множина P_a це заштрихована на рис. 3.3. область. Як видно, ця область – опукла.

Припустимо, що $U(x)$ – двічі безперервно диференціюєма функція і матриця її других похідних (матриця Гессе) H від'ємно визначена. Це означає, що для будь-якого ненульового n - мірного вектору x виконується нерівність: $x'Hx < 0$. Від'ємно певно визначена матриця H часто позначається так: $H < 0$. В нашому випадку, матриця Гессе H - має вигляд:

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \cdots & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_n \partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} < 0.$$

Матриця H – симетрична. Від'ємна визначеність матриці H разом з умовою (3.14) означає, що $U(x)$ строго вогнута функція. Звідси витікає, що елементи на головній діагоналі H - від'ємні, тобто

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}<0,\ i=\overline{1,n}. \qquad (3.15)$$

З формули (3.15) отримуємо, що швидкість зміни першої похідної $u(x)$ - граничній корисності – від'ємна. Таким чином, формула (3.15) означає, що гранична корисність будь-якого товару зменшується у міру того, як збільшується його споживання. Допущення про від'ємну визначеність матриці H, яке тягне (3.15), називається першим законом Госсена (К. Госсен – німецький економіст XIX сторіччя, який підмітив цей закон на практиці).

Аксіоматичний підхід до побудови функції корисності є недосконалим у зв'язку з важкістю перевірки наведених вище припущень у реальних умовах чи, навіть, близькими до них. Тому в економічних дослідженнях використовують конкретні види функцій корисності в залежності від реальних фактів та спостережень.

Приклади функцій корисності.

1) Квадратична:

$$U(x)=a'x+\frac{1}{2}x'Bx,\ \nabla U(x)=a+Bx'>0,\ B<0,\ a\in R^n,\quad x\in R^n,$$

де a' - транспонований вектор a; a, B - задані величини.

2) Логарифмічна (Бернуллі)

$$U(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j\log(x_j-\overline{x_j});\qquad \begin{cases} a_j>0, \\ x_j>\overline{x_j}\geq 0, \\ j=1,\ldots,n, \end{cases}$$

де a_j, $\overline{x_j}$, $j=1,\ldots,n$ - задані величини.

3) Постійної еластичності:

$$U(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{1-b_j}(x_j-\overline{x_j})^{1-b_j};\qquad \begin{cases} a_j>0, \\ 0<b_j<1, \\ x_j>\overline{x_j}\geq 0, \\ j=1,\ldots,n. \end{cases}$$

Величини $a_j, b_j, \overline{x_j}$ - задані.

3.3 Задача оптимального споживання

Введемо бюджетне обмеження, яке означає, що грошові витрати на товари і послуги не можуть перевищувати грошового доходу. Позначимо вектор цін товарів: $p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$. Його компонента p_i - ціна одиниці i-го товару $(i = \overline{1,n})$.

Позначимо I - грошовий дохід. Так як загальні витрати не можуть перевищувати дохід, тоді бюджетне обмеження:

$$p'x \le I. \tag{3.16}$$

Задача оптимального споживання полягає в наступному: необхідно знайти вектор x^*, який є розв'язком задачі:

$$\left.\begin{aligned} U(x) &\to \max, \\ p'x \le I,\ x &\ge 0, \end{aligned}\right\}, \tag{3.17}$$

де $U(x)$ - строго вогнута функція.

Раніше було прийнято допущення про те, що матриця других похідних $U(x)$ - від'ємно визначена. Ліва частина обмеження в задачі (3.17) - лінійна функція при заданих цінах. Тому вона - опукла функція x. Таким чином, обмеження в (3.17) має опуклу допустиму область. Отже, (3.17) - представляє задачу максимізації строго вогнутої функції на опуклій множині. Така задача має єдине рішення. Тому, згідно з теоремою Куна-Таккера, необхідні і достатні умови максимуму:

$$\left.\begin{aligned} \nabla U(x) - \lambda p = O_n, \\ \lambda(I - p'x) = 0,\ \ \lambda \ge 0, \end{aligned}\right\}, \tag{3.18}$$

де $\nabla U(x)$- градієнт $U(x)$, λ- множник Лагранжа, O_n- нульовий n-мірний вектор.

Вирішимо (3.17), використовуючи (3.18). Нехай $\lambda = 0$, тоді з (3.18) $\nabla U(x) = O_n$, що суперечить припущенню (3.12). Тоді $\lambda > 0$. Отже, з (3.18) $I - p'x = 0$.

Таким чином, рішення x^* задовольняє умові: $I - p'x^* = 0$, воно визначає точку в C. Ця точка називається точкою попиту.

<u>Приклад 3.1.</u> Нехай n=2, тоді з (3.18) отримуємо:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0, \end{aligned}\right\} \text{ що відповідає першому рівнянню в (3.18)}$$

$I - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$ - друге рівняння в (3.18).

Координати (x_1^*, x_2^*) точки попиту x^* є розв'язком приведеної системи рівнянь. Геометрично рішення знаходиться в точці дотику бюджетною прямою і кривою байдужості (лінії рівного рівня), див. рис.3.4.

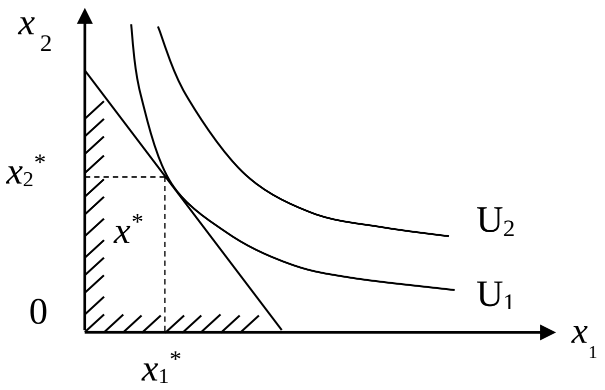

Рис. 3.4. Графічне розв'язання задачі

На ньому точка попиту x^* - точка дотику прямою $I - p_1x_1 - p_2x_2 = 0$ і кривою байдужості U_1 – рішення.

Оптимальний множник Лагранжа

$$\lambda^* = \frac{\partial U(x^*)}{\partial I} > 0 \tag{3.19}$$

називається граничною корисністю додаткового доходу. Іноді називають λ^* граничною корисністю грошей. Згідно (3.19) λ^* - кількість, на яку збільшиться оптимальний рівень корисності, якщо дохід збільшиться на малу величину.

Рішення (3.17), може бути представлено у вигляді функцій коефіцієнтів лівої частини і правої частини обмеження, тобто $\left.\begin{aligned} x^* &= f(p,I), \\ \lambda^* &= \gamma(p,I), \end{aligned}\right\}$

де $f(p,I)$ – вектор-функція: $f(p,I) = \begin{bmatrix} f_1(p,I) \\ f_2(p,I) \\ \vdots \\ f_n(p,I) \end{bmatrix}.$

Перші векторні рівняння рішення задачі (3.17) можна записати так:

$$x_i^* = f_i(p_1, p_2, \ldots, p_n, I), \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.20}$$

Ці рівняння називаються *функціями попиту* на i -й товар.

Важлива властивість функцій попиту - їх однорідність нульової міри відносно всіх цін і доходу. Це означає, що

$$f(\lambda p, \lambda I) = \lambda^0 f(p,I) = f(p,I), \tag{3.21}$$

де $\lambda = const$.

Властивість (3.21) витікає з постановки задачі (3.17). Якщо обидві частини обмеження в (3.17) помножити на λ, то рішення задачі (3.17) не зміниться, оскільки не зміниться її обмеження.

Через властивість (3.21) попит залежить від відношення цін. Покажемо це. Нехай в (3.21) $\lambda = 1/p_1$, тоді отримаємо з (3.20) і (3.21)

$$x_i^* = f_i(p_1, p_2, \dots, p_n, I) = f_i(1, p_2/p_1, \dots, p_n/p_1, I/p_1),\ i = \overline{1,n}.$$

Можна також вибрати $\lambda = 1/I$ і $\lambda = 1\Big/\sum_{i=1}^{n} p_i$.

Коротке резюме: $u(x)$ - увігнута функція, має лінії рівного рівня. Точка попиту - єдина. Точка попиту знаходиться на дотичній до кривої рівного рівня, яка в той же час є кривою байдужості, величина функція корисності для усіх точок на цій кривій однакова.

3.4 Зрівняльна статика споживання

У попередньому розділі було встановлено, що точки попиту x^* задовольняє рівнянню $I - p'x^* = 0$. Воно витікає з другого рівняння в (3.18). Але x^* повинно задовольняти і першій умові з двох необхідних і достатніх умов максимуму (3.18). Таким чином,

$$\left.\begin{aligned} &\nabla U(x^*) - \lambda^* p = O_n, \\ &I - p'x^* = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

Представляє інтерес визначення чутливості x^* і граничної корисності λ^* до зміни цін і доходу. Цю чутливість вимірюватимемо за допомогою приватних похідних цих величин. Введемо матрицю:

$$\left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_1} & \dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_2} & \dots & \dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_n} \\ \dfrac{\partial x_2^*}{\partial p_1} & \dfrac{\partial x_2^*}{\partial p_2} & \dots & \dfrac{\partial x_2^*}{\partial p_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial x_n^*}{\partial p_1} & \dfrac{\partial x_n^*}{\partial p_2} & \dots & \dfrac{\partial x_n^*}{\partial p_n} \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Її розмірність $n \times n$.

Чутливість λ^* до зміни цін визначається градієнтом λ^* за цінами:

$$\nabla p\lambda^* = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_1} \\ \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_2} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_n} \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

Після визначення x^* и λ^* важливо знайти *компенсовану зміну ціни*, тобто таку її зміну, яка компенсується таким чином, щоб функція корисності не змінилася. Це означає, що споживач нічого не втратить від зміни ціни, оскільки її функція корисності $U(x)$ не зміниться. При цьому величини, що характеризують чутливість попиту x^* до вектору ціни p, а саме матриця $\left[\dfrac{\partial x^*}{\partial p}\right]$ і градієнт, повинні дорівнювати деяким величинам:

$$\left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right] = \left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right]_{comp}, \quad \nabla p\lambda^* = (\nabla p\lambda^*)_{comp},$$

де матриця $\left[\dfrac{\partial x^*}{\partial p}\right]_{comp}$ і вектор $(\nabla p\lambda^*)_{comp}$ невідомі і їх необхідно знайти.

Визначимо тепер чутливість точки попиту x^* і граничної корисності λ^* до зміни доходу I за допомогою виразів:

$$\frac{\partial x^*}{\partial I} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1^*}{\partial I} \\ \dfrac{\partial x_2^*}{\partial I} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial x_n^*}{\partial I} \end{bmatrix}$$ - n-мірний вектор (чутливість x^* по I);

$\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial I}$ (чутливість λ^* по I).

Приклад 3.2.

Споживач може придбати два товари у кількості x_1 і x_2. Його функція корисності $U(x) = x_1 x_2^3$, де $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Вектор цін товарів $p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$. Доход дорівнює I. Необхідно визначити функції попита споживача на обидва товари.

Рішення.

Для визначення функції попита необхідно розв’язати задачу $U(x) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \to \max$, $I - p'x = 0$.

Така задача має єдине рішення. Тому згідно теорії Куна-Таккера необхідні та достатні умови максимума:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla U(x) - \lambda p = O_n \\ &\lambda(I - p'x) = 0,\ \ \lambda \ge 0 \end{aligned}\right\},$$

де $\nabla U(x)$- градієнт $U(x)$, λ- множник Лагранжа, O_n- нульовий *n*-мірний вектор, де «´» - позначає символ транспонування.

Складемо функцію Лагранжа для даного прикладу: $U(x_1, x_2, \lambda) = u(x) + \lambda(I - p_1 x_1 - p_2 x_2) = x_1 x_2^3 + \lambda I - \lambda p_1 x_1 - \lambda p_2 x_2$.

З неї отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial x_1} = x_2^3 - \lambda p_1 = 0, \\ &\frac{\partial U}{\partial x_2} = 3x_1 x_2^2 - \lambda p_2 = 0, \\ &\frac{\partial U}{\partial \lambda} = I - p_1 x_1 - p_2 x_2. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &x_2^3 = \lambda p_1, \\ &3x_1 x_2^2 = \lambda p_2, \\ &p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{aligned} \left.\begin{aligned} &\lambda = x_2^3 / p_1, \\ &\lambda = 3x_1 x_2^2 / p_2. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$x_2^3 / p_1 = 3x_1 x_2^2 / p_2$, $\Rightarrow$ $x_2 = 3x_1 p_1 / p_2$, тоді $x_1 = x_2 p_2 / 3p_1$.

В рівняння $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$ підставим вираз для x_1 та отримаємо:

$$p_1 \frac{p_2 x_2}{3p_1} + x_2 p_2 = I \text{, звідки } x_2 \frac{4p_2}{3} = I \quad \Rightarrow \quad x_2^* = \frac{3I}{4p_2}.$$

Таким же чином знайдемо $x_1^* = \dfrac{I}{4p_1}$.

Це рішення x^*: ($x_1^* = \dfrac{I}{4p_1}$ та $x_2^* = \dfrac{3I}{4p_2}$) є точкою попита. Точка попита залежить від цін і доходу (функція корисності є незмінною тому, що розглядається окремий споживач). Таким чином, точка попита є функція попита споживача на обидва товари. ◊

Величини, що характеризують чутливість попиту x^* і граничної корисності λ^* до зміни ціни p і доходу I визначаються основним матричним рівнянням теорії корисності. Накреслимо шляхи його визначення.

Визначимо диференціал функції корисності:

$$dU(x) = [\nabla U(x)]' dx.$$

Тут $\nabla U(x)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial U}{\partial x_1}\\ \vdots \\ \dfrac{\partial U}{\partial x_n}\end{bmatrix}$, $\quad dx=\begin{bmatrix}dx_1\\ \vdots \\ dx_n\end{bmatrix}$.

де $\nabla U(x)$ - градієнт функції корисності.

З (3.18) маємо

$$\nabla U(x)=\lambda p .$$

Тоді

$$dU(x)=\lambda p' dx .$$

Щоб $dU(x)=0$ (функція корисності не змінюється), отримаємо з попереднього рівняння

$$p'dx=0 ,$$

оскільки $\lambda>0$.

З другого рівняння в (3.18) маємо

$$I-p'x=0,$$

оскільки $\lambda>0$.

Звідси

$$dI=p'dx+x'dp .$$

Оскільки $p'dx=0$ отримаємо

$$dI=(dp)'x=x_1dp_1+x_2dp_2+\cdots+x_ndp_n .$$

З даного рівняння, диференціюючи (3.22) по p та I отримуємо матричне рівняння:

$$\left[\begin{array}{c:c} 0 & -p' \\ -p' & H(x^*)\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c:c:c} \dfrac{\partial\lambda^*}{\partial I} & (\nabla_p\lambda^*)' & (\nabla_p\lambda^*)'_{comp} \\ \hdashline \dfrac{\partial x^*}{\partial I} & \left[\dfrac{\partial x^*}{\partial p}\right] & \left[\dfrac{\partial x^*}{\partial p}\right]_{comp}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c:c} -1 & (x^*)' & O_{1n} \\ \hdashline O_{n1} & \lambda^*\mathrm{I}_n & \lambda^*\mathrm{I}_n\end{array}\right], \quad (3.25)$$

де $H(x)$ - матриця других похідних $u(x)$.

Введемо наступні позначення для матриць:

$$\left[\begin{array}{c:c} 0 & -p' \\ -p' & H(x^*)\end{array}\right]=A; \quad \left[\begin{array}{c:c:c} \dfrac{\partial\lambda^*}{\partial I} & (\nabla_p\lambda^*)' & (\nabla_p\lambda^*)'_{comp} \\ \hdashline \dfrac{\partial x^*}{\partial I} & \left[\dfrac{\partial x^*}{\partial p}\right] & \left[\dfrac{\partial x^*}{\partial p}\right]_{comp}\end{array}\right]=B; \quad \left[\begin{array}{c:c:c} -1 & (x^*)' & O_{1n} \\ \hdashline O_{n1} & \lambda^*\mathrm{I}_n & \lambda^*\mathrm{I}_n\end{array}\right]=C,$$

де матриця A має розмір $(n+1)\times(n+1)$, матриця $B-(n+1)\times(2n+1)$, матриця $C-(n+1)\times(2n+1)=2n^2+3n+1$.

Таким чином, (3.25) можна кратко записати так:

$$AB = C. \tag{3.25a}$$

У (3.25) невідомими виступають наступні величини:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{матриці розміру}\,(n\times n):\ \left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right],\quad \left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right]_{comp},\\
&\text{вектори розміру}\,(n\times 1):\ \frac{\partial x^*}{\partial I},\,\left(\nabla_{\mathrm{p}}\lambda^*\right)_{comp},\,\nabla_p\lambda^*,\\
&\text{скаляр}:\ \frac{\partial\lambda^*}{\partial \mathrm{I}}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

Загальне число невідомих - елементів вказаних матриць і компонент векторів: $2n^2 + 3n + 1$.

Вважаються відомими величини x^* і λ^*, тобто C - матриця в правій частині (3.25) і, зрозуміло, p і $H(x^*)$ в лівій частині (3.25). Число елементів в матриці B - другій матриці в правій частині (вони невідомі):

$$(n+1)(2n+1) = (2n^2 + n + 2n + 1) = 2n^2 + 3n + 1.$$

Це число - число рівнянь для визначення невідомих в (3.26). Воно рівне, згідно із сказаним, числу невідомих елементів матриць і компонент векторів в (3.26).

Якщо матриця $H(x^*)$ від’ємно визначена, то матриця $A = \begin{bmatrix} 0 & -p' \\ -p' & H(x^*) \end{bmatrix}$ - невироджена. Тоді можна отримати єдине рішення рівняння (3.25), тобто визначити величини (3.26). Дійсно, в цьому випадку маємо з (3.25а): $B = A^{-1}C$, тобто

$$\cdot\left[\begin{array}{c:c:c}
\dfrac{\partial\lambda^*}{\partial I} & \left(\nabla_p\lambda^*\right)' & \left(\nabla_p\lambda^*\right)'_{comp}\\ \hdashline
\dfrac{\partial x^*}{\partial I} & \left[\dfrac{\partial x^*}{\partial p}\right] & \left[\dfrac{\partial x^*}{\partial p}\right]_{comp}
\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} 0 & -p' \\ -p' & H\left(x^*\right)\end{array}\right]^{-1}\cdot\left[\begin{array}{c:c:c} -1 & \left(x^*\right)' & O_{1n}\\ \hdashline O_{n1} & \lambda^*\mathrm{I}_n & \lambda^*\mathrm{I}_n\end{array}\right].$$

Його права частина є добуток двох матриць, елементи яких відомі. У його лівій частині знаходиться матриця з невідомими $2n^2 + 3n + 1$ елементами.

Зокрема, з рішення перетвореного рівняння (3.25) виходить рівняння Слуцького:

$$\left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right] = \left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right]_{comp} - \frac{\partial x^*}{\partial I}(x^*)'. \tag{3.27}$$

Звідси для кожного товару і ціни маємо

$$\left[\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right] = \left[\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right]_{comp} - \frac{\partial x_j^*}{\partial I}x_i^*,\ i, j = 1,2,\cdots,n, \tag{3.28}$$

де $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}$ - загальний ефект зміни попиту на j-ий товар від зміни ціни на i-ий товар; $\left[\frac{\partial x_j^*}{\partial p_{\ i}}\right]_{comp}$ - вплив компенсованої зміни попиту на j-ий товар із-за зміни ціни на i-ий товар; $\left(-\frac{\partial x_j^*}{\partial I} x_i^*\right)$ - вплив зміни доходу на попит на $j-$ий товар залежно від попиту на i-ий товар.

Таким чином, можна записати:

загальний ефект зміни попиту	=	вплив компенсованої зміни ціни	+	вплив зміни доходу

Матриця $\left[\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right]_{comp}$ знаходиться з наступної системи рівнянь, отриманої з (3.25), якщо $1\,cmp\ A \times 3\,cmp\ B = C_{13}$ та $2\,cmp\ A \times 3\,cmp\ B = C_{23}$

$$\left.\begin{array}{l} \left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right]_{comp} P = 0_n\ ,\ n \times 1, \\ -P\left(\nabla_p \lambda^*\right)'_{comp} + H\left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right]_{comp} \lambda^* J_n\ ,\ n \times n \end{array}\right\} \tag{3.29}$$

Рівнянь $n + n^2$. Невідомих $n^2 + n$.

Можна показати, що матриця впливу заміни $\left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right]_{comp}$ симетрична і від’ємно визначена, тобто $z'\left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right]_{comp} z \le 0$ для довільного вектору. $z \ne O_n$ (нагадаємо, що O_n - нульовий n-мірний вектор).

З умови від’ємності матриці $\left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right]_{comp}$ виходить, що

$$\left[\frac{\partial x_i^*}{\partial pi}\right]_{comp} < 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.30}$$

Це означає, що компенсоване зростання ціни товару приводить до зменшення попиту на нього: ціна зросла, щоб корисність не змінилася, потрібно купувати менше товару. (А щоб компенсувати нестачу товару потрібно купувати той товар, на який ціна зменшилася).

З (3.28) маємо для j -го товару і ціни на нього.

$$\left[\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right]=\left[\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right]_{comp}-\frac{\partial x_j^*}{\partial I}x_j^*.$$

Звідси

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\le 0,\text{ коли }\begin{cases}\left|\frac{\partial x_j}{\partial I}x_j^*\right|<\left|\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right)_{comp}\right|<0, & \text{если } \frac{\partial x_j^*}{\partial I}<0,\\ \frac{\partial x_j^*}{\partial I}>0, & \text{если } \frac{\partial x_j^*}{\partial I}\ge 0.\end{cases}$$

У загальному випадку кожен товар може бути віднесений до однієї з трьох категорій (табл. 3.1):

Таблиця 3.1

Загальний розподіл товарів за категоріями

Вплив зміни ціни	Вплив зміни доходу	
	$\frac{\partial x_j^*}{\partial I}>0$ (цінні товари)	$\frac{\partial x_j^*}{\partial I}<0$ (малоцінні товари)
Нормальні товари $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}<0$	Наприклад, масло $\uparrow P\downarrow S$	Наприклад, маргарин
Товари Гіффіна $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}>0$	—	Субпродукти для малозабезпечених

Прикладом нормального цінного товару є масло: якщо ціна на нього зростає його купляють менше, а при підвищені доходу – більше. Що стосується маргарину (нормального малоцінного товару) його купляють менше якщо підвищується на нього ціна, але зі збільшенням доходу його купляють теж менше, тому що у споживача виникає можливість купувати більше масла.

<u>Приклад 3.3.</u>

Використовуючи дані, а також функції попиту споживача на обидва товари, наведені в прикладі 3.2, необхідно визначити їх чутливість к цінам і доходу. Написати та виконати аналіз рівняння Слуцького.

Рішення.

Маючи точку попиту з попереднього прикладу: x^*: ($x_1^* = \frac{I}{4p_1}$ та $x_2^* = \frac{3I}{4p_2}$) знайдемо граничну корисності λ^*:

$$\lambda^* = \frac{\left(x_2^*\right)^3}{p_1} = \frac{(3I)^3}{64p_1p_2^3} = \frac{27}{64}\frac{I^3}{p_1p_2^3};\ \lambda^* = \frac{3x_1^*(x_2^*)^2}{p_2} = \frac{3I(3I)^2}{64p_1p_2^3} = \frac{27}{64}\frac{I^3}{p_1p_2^3}.$$

Визначимо чутливості x^* і граничної корисності λ^* до зміни цін і доходу.

Оскільки $\frac{\partial x_1^*}{\partial I} = \frac{1}{4p_1} > 0$; $\frac{\partial x_2^*}{\partial I} = \frac{3}{4p_2} > 0$, то обидва товари є цінними.

В загальному вигляді рівняння Слуцького має наступний вигляд: $\left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right] = \left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right]_{comp} - \frac{\partial x^*}{\partial I}(x^*)'$. Для кожного товару і ціни маємо

$$\left[\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right] = \left[\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right]_{comp} - \frac{\partial x_j^*}{\partial I}x_i^*,\ i, j = 1,2,$$

де $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}$ - загальний ефект зміни попиту на j-ий товар від зміни ціни на i-ий товар; $\left[\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right]_{comp}$ - вплив компенсованої зміни попиту на j-ий товар із-за зміни ціни на i-ий товар; $\left(-\frac{\partial x_j^*}{\partial I}x_i^*\right)$ - вплив зміни доходу на попит на $j-$ий товар залежно від попиту на i-ий товар.

Напишем рівняння Слуцького в загальному вигляді відносно другого товару:

$$\left[\frac{\partial x^*}{\partial p_2}\right] = \left[\frac{\partial x^*}{\partial p_2}\right]_{comp} - \frac{\partial x^*}{\partial I}x_2^* \quad \text{або} \quad \left[\frac{\partial x^*}{\partial p_2}\right]_{comp} = \left[\frac{\partial x^*}{\partial p_2}\right] + \frac{\partial x^*}{\partial I}x_2^*.$$

$$\left[\frac{\partial x_1^*}{\partial p_2}\right]_{comp} = 0 + \frac{1}{4p_1}\cdot\frac{3I}{4p_2} = \frac{3I}{16p_1p_2};$$

$$\left[\frac{\partial x_2^*}{\partial p_2}\right]_{comp} = -\frac{3I}{4p_2^2} + \frac{3}{4p_2}\cdot\frac{3I}{4p_2} = -\frac{3I}{16p_2^2}.\ \left[\frac{\partial x_1^*}{\partial p_2}\right]_{comp} > 0;\ \left[\frac{\partial x_2^*}{\partial p_2}\right]_{comp} < 0.$$

Це означає, що перший і другий товар взаємозамінні.

Приклад 3.4.

Споживач може придбати два товари у кількості x_1 і x_2. Його функція корисності $U(x) = x_1 + 3x_2$, де $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Вектор цін товарів $p = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$. Доход дорівнює 60. Нехай тепер ціна другого товару стала 22. Необхідно визначити компенсацію доходу.

Рішення.

Точка попиту була (0, 3), і максимальна корисність дорівнювала 9. Тепер точка попиту є $(60 + dI)/22$. Розмір компенсації визначається з умов рівності попередньої і теперішньої корисності, тобто $9 = 3(60 + dI)/22$. Таким чином розмір компенсації дорівнює 6.

3.5. Рівновага попиту та пропозиції.

Стан ринку, при якому попит дорівнює пропозиції є *рівноважним*, а ціна, при якій досягнена рівновага попиту та пропозиції є *рівноважною ціною*.

Теорема. Нехай функції попиту та пропозиції неперервні і $D(p_0) > S(p_0)$ при деякій ціні p_0; тоді існує стан рівноваги.

Доказ. Так як при $p \to \infty$ $D(p)$ убуває до нулю, а $S(p)$ безмежно зростає, то $D(p') < S(p')$ при деякому $p' > p_0$. Величина незадовільно попиту $Z(p) = D(p) - S(p)$ приймає на кінцях відрізку $[p_0, p']$ значення різного знака, а так як вона безперервна, то за теоремою Больцано-Коші знайдеться точка p^* відрізку $[p_0, p']$, в якому вона дорівнює нулю, таким чином $D(p^*) = S(p^*)$. Параметри рівноваги позначають знаком "*": p^*, $D^* = D(p^*) = S(p^*) = S^*$. Зазвичай саму трійку (D^*, p^*, S^*) також звуть рівновагою.

Вважаємо, що функції попиту і пропозиції задовольняють припущенням про них. В силу умов накладених на функцій, рівняння $D(p) = S(p)$ має єдине рішення p^* і трійка (D^*, p^*, S^*) де $D^* = D(p^*) = S^* = S(p^*)$ є єдиний стан рівноваги.

Але для приведення цього процесу до стану рівноваги необхідно дотримання деяких умов. Наприклад, якщо функції попиту $D(p) = a - bp$ та пропозиції $S(p) = -c + dp$ лінійні, то для збіжності необхідно і достатньо виконання умови $d < b$, тобто лінія попиту повинна бути більш похилою, ніж лінія пропозиції. В загальному випадку, тобто для нелінійної функції попиту та пропозиції, хоча б поблизу рівноважної ціни p^* повинна виконуватися умова $S'(p^*) < |D'(p^*)|$. Якщо

Якщо в деякому околі рівноважної ціни процес ітерацій сходиться до стану рівноваги при будь-якому початковому значенні ціни з цього окіла, то стан рівноваги називається *стійким*. Якщо ж, навпаки, існує окіл рівноважної ціни такий, що при будь якій ітерації не сходиться до стану рівноваги, то такий стан рівноваги називається нестійким. При лінійних функціях попиту і пропозиції стан рівноваги стійкий, якщо $d < b$, і нестійке, якщо $b \le d$.

Приклад 3.5. Знайти стан рівноваги для лінійних функцій попиту $D(p) = a - bp$ та пропозиції $S(p) = -c + dp$.

Рішення.

Дорівнюючи функції, отримаємо:

$$a - bp = -c + dp, \;\; p^* = (a+c)/(b+d), \;\; D^* = (ad - bc) - (b+d) = S^*.$$

Графічне рішення зображено на рис. 3.5.

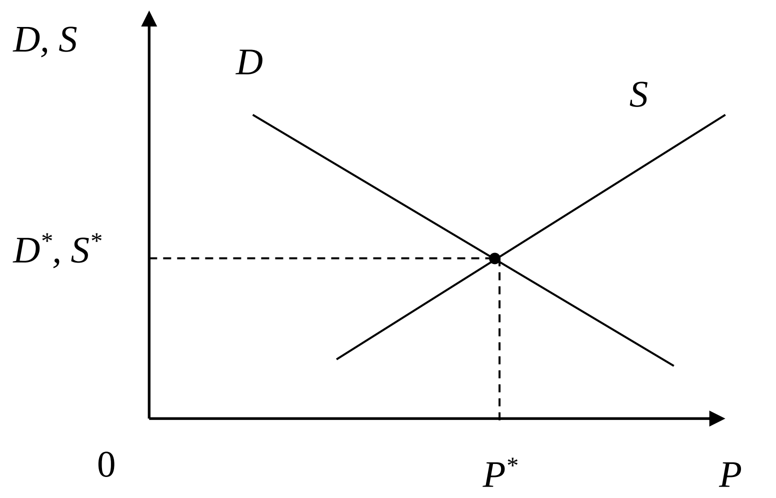

Рис. 3.5. Стан рівноваги для лінійних функцій попиту та пропозиції.

3.5.1. Павутиноподібна модель ринку.

В дісності знаходження рівноважної ціни здіснюється дослідним (досвідченим) шляхом за допомогою послідовних наближень. Ця процедура отримала назву павутиноподібної моделі ринку. Вона застосовується в тому випадку, коли функції попиту і пропозиції або складні, або взагалі невідомі. Розглянемо більш детально послідовність дій які виконуються у цій моделі для находження рівноважної ціни. (див. рис. 3.6).

1. Призначається вихідна ціна товару p_0 така, щоб попит був більше пропозиції, тобто $D_0 > S_0$. Це означає, що ціну можна збільшити до p_1. При цьому очікується, що попит упаде, а пропозиція збільшиться.

Даний етап будем називати нульовим кроком.

2. Збільшимо ціну таким чином, щоб попит став дорівнювати пропозиції на нульовому кроку, тобто робимо перший крок. При цьому $D_1 = S_0$.

Визначаємо пропозицію на цьому кроку S_1. Очевидно, що при цьому виявиться, що пропозиція більше попиту, тобто $S_1 > D_1$.

Переходимо до наступного кроку.

3. На другому кроку зменшуємо ціну таким чином, щоб $D_2 = S_1$. Знаходимо S_2. процедура повторюється за аналогією з 1, 2 і 3 п.п. доти, поки ціна p_i на *i*-ом кроку не стабілізується, тобто перестане істотно змінюватися.

У нашому випадку ми будемо домагатися того, щоб перестали змінюватися дві перші цифри після коми (точки). Як тільки це трапиться, пошук припиняється. Останнє значення p_i з точністю до другого знака після коми приймається в якості рівноважної точки.

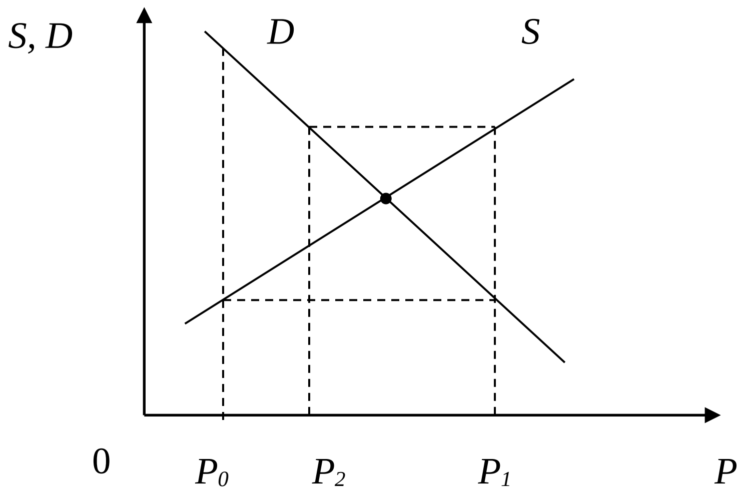

Рис. 3.6. Павутиноподібна модель ринку

3.6. Індивідуальне завдання №4 Властивості функції корисності

Студент повинен розв'язати наведену нижче задачу, вибравши дані для розрахунків (з табл. 3.2) за своїм номером у журналі групи.

3.6.1. Постановка задачі. Задано товарний простір розмірності *n*=8. Розглядається функція:

$$U(x) = a_1 \cdot \ln(x_1 - b_1) + a_2 \cdot \ln(x_2 - b_2) + a_3 \cdot \ln(x_3 - b_3) + \ldots + a_8 \cdot \ln(x_8 - b_8),$$

де $a_i, b_i, i = 1,\ldots,n$ - відомі коефіцієнти, задані табл. 1 (параметрів функції корисності);

$x_i, i = 1,\ldots,n$ - змінні (аргументи функції), які є кількістю товарів у i - тому наборі $x_i \geq 10$.

Необхідно перевірити можливість використання зазначеної функції в якості функції корисності.

3.6.2. Методичні вказівки. Функція корисності повинна бути що не убуває і вогнутою.

Перевірка функції, що не убуває, здійснюється по знаку усіх перших приватних похідних.

Перевірка увігнутості здійснюється по від'ємній визначеності матриці Гессе.

Таблиця 3.2

Розрахункові дані

№ варианта	Ім'я коефіцієнтів	№ параметрів							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	a_i	10	4	5	6	2	3	4	2
	b_i	2	3	1	5	6	7	8	3
2	a_i	11	3	4	5	3	6	7	8
	b_i	3	4	5	4	3	2	2	1
3	a_i	4	7	3	2	5	6	3	9
	b_i	5	6	3	3	2	6	3	4
4	a_i	3	2	5	3	2	5	6	7
	b_i	3	4	5	6	1	2	5	4
5	a_i	2	3	5	6	7	8	9	3
	b_i	5	8	6	3	5	3	4	7
6	a_i	4	3	4	3	2	3	5	6
	b_i	3	8	7	6	8	7	3	1
7	a_i	5	6	3	2	1	6	2	3
	b_i	2	3	7	8	4	4	9	2
8	a_i	3	8	4	5	6	7	1	2

№ варианта	Ім'я коефіцієнтів	№ параметрів							
		1	2	3	4	5	6	7	8
	b_i	4	3	2	8	8	4	7	6
9	a_i	7	2	3	4	1	8	7	5
	b_i	4	3	5	3	2	9	4	6
10	a_i	8	7	3	9	2	8	6	7
	b_i	4	5	3	7	8	5	4	3
11	a_i	6	4	3	3	5	7	6	4
	b_i	3	4	3	5	3	4	4	3
12	a_i	2	4	3	1	5	4	4	3
	b_i	4	3	2	8	7	6	5	4
13	a_i	4	5	3	2	4	3	7	3
	b_i	8	7	6	8	4	3	4	6
14	a_i	3	5	6	3	2	1	6	7
	b_i	7	6	8	4	3	5	7	4
15	a_i	4	5	6	3	2	1	7	5
	b_i	6	9	8	7	6	9	8	5
16	a_i	3	3	4	5	6	7	8	3
	b_i	4	3	2	6	7	5	4	3
17	a_i	4	3	3	2	3	4	5	3
	b_i	3	8	6	3	4	3	4	2
18	a_i	4	3	3	2	3	4	5	3
	b_i	5	4	6	7	9	7	5	4
19	a_i	3	4	3	4	5	2	1	8
	b_i	7	8	7	5	6	4	3	2
20	a_i	4	3	5	6	7	2	3	1
	b_i	5	4	3	5	6	4	7	8

3.7. Індивідуальне завдання №5
Визначення функції попиту і чутливості до цін і доходу.

3.7.1. Постановка задачі. Споживач може придбати два товари у кількості x_1 і x_2. Доход дорівнює I. Функція корисності $u(x) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, де $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Вектор цін товарів $p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$.

Необхідно визначити функції попиту споживача на обидва товари і їх чутливості до цін і попиту. Для конкретної ціни p_1 і p_2 (див. табл. 3.3) знайти функцію попиту. Навести графічне рішення.

3.7.2. Методичні вказівки. Для визначення функції попиту необхідно розв'язати задачу $u(x) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \to \max$, $I - p'x = 0$. Така задача має єдине рішення. Необхідна і достатня умова максимуму: $\nabla U(x) - \lambda p = O_2$, $I - p'x = 0$.

Геометричне рішення – в точці дотику бюджетної прямої та кривою байдужості для товару x^* (точки попиту (x_1^*, x_2^*)), див. рис. 3.4.

Чутливость x^* до зміни цін і доходу визначається за допомогою приватних похідних цих величин:

$$\left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_1} & \dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_2} \\ \dfrac{\partial x_2^*}{\partial p_1} & \dfrac{\partial x_2^*}{\partial p_2} \end{bmatrix} \text{ та } \frac{\partial x^*}{\partial I} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1^*}{\partial I} \\ \dfrac{\partial x_2^*}{\partial I} \end{bmatrix}.$$

Таблиця 3.3

Розрахункові дані

№ варіанта	α	β	p_1	p_2
1	1	2	10	8
2	3	3	10	20
3	1	4	15	21
4	1	5	11	22
5	1	0,5	12	27
6	1,5	2	14	30
7	1,5	3	13,5	29
8	1,5	4	9	30
9	1,5	5	8	19
10	1,5	1	12,5	20,5
11	2	3	16,5	30,5
12	3	4	16	18
13	2	5	11,3	19,5
14	2	4	7,8	29,5
15	1	1,5	15	31

3.8. Індивідуальне завдання №6

Визначити вплив компенсированої зміни попиту на основі рівняння Слуцького.

Студент повинен розв'язати наведену нижче задачу, вибравши дані для розрахунків (з табл. 3.3) за своїм номером у журналі групи.

3.8.1. Постановка задачі. Визначити вплив компенсованої зміни попиту на основі рівняння Слуцького, вхідними даними для завдання є функції попиту, що отримані у попередньому завданні відповідно для обраного варіанту. Навести аналіз рівняння Слуцького.

3.8.2. Методичні вказівки. Чутливість λ^* до зміни цін визначається градієнтом λ^* за цінами:

$$\nabla p \lambda^* = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_1} \\ \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_2} \end{bmatrix}.$$

В загальному вигляді рівняння Слуцького має наступний вигляд: $\left[\dfrac{\partial x^*}{\partial p}\right] = \left[\dfrac{\partial x^*}{\partial p}\right]_{comp} - \dfrac{\partial x^*}{\partial I}(x^*)'$. Для кожного товару і ціни маємо

$$\left[\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right] = \left[\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right]_{comp} - \frac{\partial x_j^*}{\partial I} x_i^*, \; i, \; j = 1{,}2,$$

де $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_i}$ - загальний ефект зміни попиту на j-ий товар від зміни ціни на i-ий товар; $\left[\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right]_{comp}$ - вплив компенсованої зміни попиту на j-ий товар із-за зміни ціни на i-ий товар; $\left(-\dfrac{\partial x_j^*}{\partial I} x_i^*\right)$ - вплив зміни доходу на попит на $j-$ий товар залежно від попиту на i-ий товар.

Написать рівняння Слуцького в загальному вигляді відносно другого товару.

3.9. Індивідуальне завдання №7

Пошук точки рівноваги за допомогою павутиноподібної моделі ринкового товару.

Студент повинен розв’язати наведену нижче задачу, вибравши дані для розрахунків (з табл. 3.3) за своїм номером у журналі групи.

3.9.1. Постановка задачі. Потрібно відшукати рівноважну ціну, користуючись павутиноподібною моделлю ринку, функції попиту і пропозиції якого можуть бути задані функціями:

$$D(p) = (g^3 - 3g^3u^4 + 3g^3u^3 - g^3u^5)\cdot p^{3,5} + (g^2 - 2g^2u^2 + g^2u^5)\cdot p^{1,97} + a - bp \quad (1)$$

$$S(p) = (g^3 - 3g^3u^5 + 3g^3u^4 - g^3u^6)\cdot p^{7,5} + (g^2 - 2g^2u^3 + g^2u^6)\cdot p^{1,5} - c + dp \quad (2)$$

Необхідні значення коефіцієнтів виражень (1) і (2) (параметри задачі) та початкова точка p_0 задані в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3

Розрахункові дані

№ варіанту	Параметри						
	g	*a*	*b*	*c*	*d*	*u*	p_0
1	10	20	2	4	1	1	5
2	15	21	3	7	1	1	4
3	11	22	3	8	2	1	2
4	12	27	3,5	4	2	1	2
5	14	30	5	2	3	1	1,5
6	13,5	29	6	6	1	1	2
7	9	30	5	6	1	1	2,5
8	8	19	3	6	2	1	2
9	12,5	20,5	3,5	4,5	1,5	1	2
10	16,5	30,5	5	6,5	2	1	2,2
11	16	18	3	8	1,5	1	2,5
12	11,3	19,5	4	9,5	3	1	1,5
13	7,8	29,5	6	9,5	2	1	1,7
14	15	31	3	2,5	2	1	4
15	16	24	3,5	4	2	1	4
16	13	28	4	5	1,5	1	2,5
17	14,3	29,5	3,5	6	2	1	2
18	12,5	25	3	5	1,5	1	1,7
19	11	24	2,5	3	1	1	3
20	9,5	20	2	2,5	1	1	2

4. ТЕОРІЯ ВИРОБНИЦТВА

Ми розглянули моделі споживання. Перейдемо тепер до розгляду моделей виробництва. Для цих моделей важливим є поняття *"фірми"*. Під *фірмою* в мікроекономічній теорії мається на увазі деяка організація, що витрачає економічні чинники (ресурси), таких як земля, праця і капітал, для виготовлення продукції і послуг, які вона продає споживачам і іншим фірмам.

4.1. Виробнича функція

Припустимо, що фірма виробляє тільки один вид продукції, використовуючи декілька видів витрат (ресурсів). В цьому випадку фірма повинна вибрати точку в просторі ресурсів. Якщо позначити x_j - кількість j-го виду ресурсів, $j=\overline{1,n}$, то вектор ресурсів:

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Причому, $x \in I$, де I - невід’ємний ортант ($I=R_n^+$), тобто. $x \geq O_n$ - простір ресурсів, кожній точці якого відповідає єдиний максимальний випуск продукції при використанні цих ресурсів. Зв'язок між випуском продукції і ресурсами задається виробничою функцією:

$$q=f(x), \tag{4.2}$$

де q – обсяг випуску продукції.

Як і при створенні моделі споживання використовують дві аксіоми для моделі виробництва.

Аксіома 1. Існує підмножина простору ресурсів, звана *економічною областю E*, в якій збільшення будь-якого виду ресурсів не призводить до зменшення випуску продукції, тобто:

$$x^{(1)} \geq x^{(2)} (x^{(1)}, x^{(2)} \in E) \Rightarrow f(x^{(1)}) \geq f(x^{(2)}), \tag{4.3}$$

де $x^{(1)}, x^{(2)}$ - точки в економічній області E, причому

$$\nabla f(x) \geq 0_n, \quad x \in E \tag{4.4}$$

чи

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \geq 0, \quad j=\overline{1,n} \tag{4.5}$$

Це вираження означає, що із збільшенням використання j-го ресурсу випуск продукції не зменшується.

Аксіома 2. Існує підмножина $\Omega \in E$, яка є опуклою і для якої матриця других похідних функції $f(x)$ (матриця Гессе) від’ємно визначена.

Таким чином, матриця Гессе: $H(x)=\left[\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right], \quad i,j,=\overline{1,n}$ і для неї має місце співвідношення:

$$H(x)<0,\ x\in\Omega. \qquad (4.6)$$

З (4.6) слідує:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j^2}<0,\ j=\overline{1,n},\ x\in\Omega. \qquad (4.7)$$

Вираження (4.7) - закон *убуваючої віддачі* (*убуваючої прибутковості*): із збільшенням кількості ресурсів, що витрачаються, швидкість випуску продукції зменшується.

Приклад 4.1. Виробництво зерна на ділянці землі фіксованої площі обмежене. Після досягнення певного об'єму вирощеного зерна, додаткове виробництво зерна падатиме при збільшенні числа що працюють внаслідок вичерпання можливості спеціалізації працюючих і у зв'язку із збільшенням трудності координації їх роботи.◊

Згідно з двома аксіомами існує множина

$$R=\left\{x:\nabla f(x)\geq 0_n,\quad H(x)<0,\quad x\in E\right\}, \qquad (4.8)$$

яка називається особливою областю.

Перейдемо до розгляду деяких виробничих функцій. Але раніше нагадаємо поняття еластичності функції $f(x),\quad x\in R^n$, що диференціюється, по i-ій змінній:

$$e_i(x)=\frac{\partial f(x)\cdot x_i}{\partial x_i\cdot f(x)}=\frac{\partial f(x)}{f(x)\cdot\dfrac{\partial x_i}{x_i}}. \qquad (4.9)$$

Розглянемо деякі виробничі функції для двох видів ресурсів.

1. Лінійна функція:

$$q=a_1x_1+a_2x_2, \qquad (4.10)$$

де a_1,a_2- коефіцієнти, x_1,x_2 - об'єми ресурсів.

2. Функція Кобба-Дугласа:

$$q=b_0x_1^{b_1}x_2^{b_2},$$

де b_1,b_2 - коефіцієнти еластичності випуску по відношенню до першого і другого видам ресурсів. Нагадаємо зміст поняття еластичності функції.

Важливою властивістю виробничої функції є її однорідність першого ступеню. Наприклад, функція трьох змінних $f(x,y,z)$ буде однорідною, якщо

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda f(x,y,z).$$

Приклад 4.2. Довести, що якщо $b_1+b_2=1$, то виробнича функція Кобба-Дугласа $q=b_0x_1^{b_1}x_2^{b_2}$ є однорідною першого ступеню.

Рішення. Для функції Кобба-Дугласа маємо $q = b_0(\lambda x_1)^{b_1}(\lambda x_2)^{b_2} = b_0 \lambda^{b_1+b_2} x_1^{b_1} x_2^{b_2} = \lambda b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2}$. Таким чином ця функція однорідна. ◊

Розглянемо економічний сенс однорідності функції Кобба-Дугласа з двома видами ресурсів: x_1- основні засоби, x_2 - трудові ресурси. Як видно з прикладу 4.2 при одночасному збільшенні фондів і трудових ресурсів в λ разів, випуск теж зросте в λ разів.

4.2. Теорія фірми

Вважатимемо, що мета фірми - максимізація прибутку шляхом вибору витрат ресурсів при заданій ВФ і заданих ціні випуску $p \in R^1$ і цінах ресурсів $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \in R^n$. Прибуток:

$$П = D - C, \tag{4.11}$$

де D - річний дохід, C - витрати виробництва (витрати, собівартість).

Маємо

$$D = pq = pf(x), \tag{4.12}$$

$$\tilde{N} = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i = w'x, \tag{4.13}$$

Вирішуючи *довгострокову задачу планування* (на один рік і більше), фірма вільна у виборі будь-якого вектору витрат, тому ця задача сформулюється на основі виразів (4.12) і (4.13).

$$\left.\begin{aligned} П = pf(x) - w'x \to \max, \\ x \geq O_n \end{aligned}\right\}. \tag{4.14}$$

Ця задача є задача нелінійного програмування.

Для короткострокової задачі планування, наприклад на рік, необхідно врахувати обмеження на ресурси, такого виду:

$$g(x) \leq b, \tag{4.15}$$

де $g(x)$ - m-мірна функція $x \in R^n$, $b \in R^m$, тобто

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Вважаємо, що $g(x)$ и b – відомі, тоді короткострокова задача планування роботи фірми матиме наступний вигляд:

$$\left.\begin{array}{c} \Pi(x) = pf(x) - w'x \to \max, \\ g(x) \le b, \\ x \ge O_n \end{array}\right\} \qquad (4.16)$$

Задача (4.16) є задачею нелінійного програмування в загальному вигляді. Її рішення функція параметрів - цін p і w:

$$x^* = \varphi(p, w) \in R^n \qquad (4.17)$$

Це вираження називається *функцією попиту на ресурси*. Вона n-мірна:

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \dots \\ x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(p, w) \\ \varphi_2(p, w) \\ \dots \\ \varphi_n(p, w) \end{bmatrix} = \varphi(p, w) \qquad (4.18)$$

Підставляючи *функцію попиту на ресурси* у виробничу функцію, отримуємо *функцію пропозиції випуску*:

$$q^* = f(x^*) = f(\varphi(p, w)) \qquad (4.19)$$

4.3. Недосконала конкуренція. Монополія і монопсонія.

Попередній розділ був побудований на класичному припущенні про досконалу конкуренцію, тобто, що задані ціна продукції і ціни ресурсів. Ці ціни не залежать від обсягу виробництва фірми, вона на них не впливає. Проте у багатьох випадках фірма має деяку *монополію* чинити вплив на ціну продукції, а *монопсонія* чинить вплив на ціни витрат (*монопсонія* має місце, коли є один покупець деякої продукції).

Монополіст впливає на ціну продукції шляхом варіювання випуску продукції.

$$p = p(q). \qquad (4.20)$$

У загальному випадку фірма може понизити ціну, щоб продати більше продукції, тому:

$$\frac{dp}{dq} < 0. \qquad (4.21)$$

Загальний дохід згідно (4.12)

$$D(q) = p(q) \cdot q \qquad (4.22)$$

Монополіст може вплинути на ціну ресурсів, тобто на витрати, варіюванням своїх закупівель.

$$w_j = w_j(x_j), \quad j = \overline{1, n} \ \ (j \text{ - вид витрат})$$

Взагалі фірма, може купувати більшу кількість цього ресурсу, запропонувавши вищу плату за нього:

$$\frac{dw_j}{\partial x_j} > 0, \quad j = \overline{1,n},$$

але можуть бути і знижки, якщо товар в надлишку, тоді

$$\frac{dw_j}{\partial x_j} < 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Задача фірми в умовах *недосконалої конкуренції:*

$$\left.\begin{array}{r} p(q)q - \sum_{j=1}^{n} w_j(x_j)x_j \to \max, \\ q = f(x_1,\ldots,x_n), \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,n}. \end{array}\right\}, \qquad (4.23)$$

де максимум береться по q і ресурсам $x_1,\ldots,x_n$.

Сформулюємо необхідні умови максимуму для задачі (4.23). Для цього необхідно сформулювати функцію Лагранжа цієї задачі.

Функція Лагранжа

$$L = p(q)q - \sum_{j=1}^{n} w_j(x_j)x_j + \lambda\left(f(x_1,\ldots,x_n) - q\right),$$

де λ - множник Лагранжа.

Необхідні умови максимуму:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial L}{\partial q} = p(q) + \frac{dp(q)}{dq}q - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_j} = -w_j(x_j) - \frac{\partial w_j(x_j)}{\partial x_j}x_j + \lambda\frac{\partial f(x_1, x_2\ldots,x_n)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1,n}, \\ q = f(x_1, x_2\ldots,x_n), \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,n}. \end{array}\right\} \qquad (4.24)$$

Позначимо рішення задачі (4.24) q^* і x_j^*, $j = 1,\ldots,n$, причому, $q^* = f(x_1^*, x_2^*,\ldots,x_n^*)$. З (4.24) маємо

$$\lambda = p(q^*) + \frac{dp(q^*)}{dq}q^* = \frac{d(p(q)q)}{dq}\Big|_{q=q^*} = \frac{dD(q^*)}{dq}, \ j = 1,\ldots,n,$$

$$\lambda\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*,\ldots,x_n^*)}{\partial x_j} = w_j(x_j^*) + \frac{dw_j(x_j^*)}{dx_j} = \frac{d(w_j(x_j)x_j)}{dx_j}\Big|_{x_j = x_j^*} = \frac{dC_j(x_j^*)}{dx_j},$$

$j = 1,\ldots,n,$

де $C_j(x_j)$ - сумарна вартість витраченого j-го ресурсу за період планування Тоді

$$\frac{dD(q^*)}{dq}\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)}{\partial x_j}=\frac{dC_j(x_j^*)}{dx_j},\ j=1,\ldots,n.$$

Але

$$\frac{dD(q)}{dx_j}=\frac{d(p(q)q)}{\partial x_j}=\frac{dD(q)}{dq}\frac{\partial q}{\partial x_j}=\frac{dD(q)}{dq}\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)}{\partial x_j},\ j=1,\ldots,n,$$

оскільки згідно (4.24) $q = f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$.

З останніх двох рівностей отримуємо

$$\frac{dD(q^*)}{dx_j}=\frac{dC_j(x_j^*)}{dx_j},\ j=1,\ldots,n. \tag{4.25}$$

Сенс (4.25): при оптимальному доході для монополіста граничний дохід по j-му ресурсу $\frac{dD(q^*)}{dx_j}$ $(j=1,\ldots,n)$ дорівнює граничній вартості цього ресурсу.

Це формулювання є умовою рівноваги для монополіста.
З (4.25) маємо:

$$dD(q^*)=dC_j(x_j^*),\ j=1,\ldots,n.$$

Цей вираз можна трактувати так: приріст вартості ресурсу, викликаний збільшенням об'єму його використання, дорівнює приросту величини оптимального доходу, обумовленому цим збільшенням.

4.4. Конкуренція серед небагатьох. Олігополія і олігопсонія.

Ринковий механізм, коли діє трохи фірм, називається *конкуренція серед небагатьох.* Випадок, коли є декілька продавців продукції, називається *олігополією*, а коли є декілька покупців певного виду ресурсу - *олігопсонієй.* Визначальною властивістю конкуренції серед небагатьох є те, що усі конкуруючі фірми можуть впливати на ціни продукції або ресурсів. Таким чином, прибуток кожної фірми залежить від політики інших конкуруючих фірм. Тому для того, щоб визначити свою оптимальну політику, кожна фірма повинна враховувати не лише свій прямий вплив на ринок продукції і ресурсів, але і непрямий вплив через взаємодію своїх конкурентів.

У разі двох конкурентів кожен виробляє продукцію відповідно до виробничої функції:

$$q_1 = f(x_1),\quad q_2 = f(x_2), \tag{4.26}$$

де x_1, x_2 - n-мірні вектори витрат.

Ціна продукції залежить від q_1, q_2:

$$p = p(q_1, q_2) \tag{4.27}$$

У *дуополії (*окремий випадок олігополії) існує тільки два продавці товару, його загальний випуск:

$$q = q_1 + q_2 \tag{4.28}$$

Нехай ціна на продукцію залежить лінійно від її кількості:

$$p = a - b(q_1 + q_2),\ a > 0,\ b > 0. \tag{4.29}$$

Загальну вартість витрат ресурсів (витрати виробництва) кожною фірмою вважатимемо лінійною функцією випуску. Тоді

$$c_1 = cq_1 + d, \quad c_2 = cq_2 + d, \quad c > 0, \quad d > 0, \tag{4.30}$$

де c - граничні витрати (cq_1 і cq_2 – умовно змінні витрати першої і другої фірм), d - умовно постійні витрати.

Таким чином, передбачається, що у фірм однакові умовно-змінні витрати на одиницю продукції і умовно-постійні витрати. Це, безумовно, є спрощенням. Таке спрощення означає, що обидві фірми близькі за технологією і організацією виробництва.

Прибуток i-ої фірми має бути максимальним:

$$П_i = \left[a - b(q_1 + q_2)\right]q_i - cq_i - d \to \max, \quad i = 1,2. \tag{4.31}$$

Максимізуємо її по $q_i, i = 1,2$. Необхідну умову максимуму для обох задач в (4.31):

$$\frac{\partial П_i}{\partial q_i} = \left[a - b(q_1 + q_2)\right] - bq_i - b\frac{\partial q_j}{\partial q_i}q_1 - c = 0, \quad i, j = 1,2 \quad i \neq j, \tag{4.32}$$

де $\dfrac{\partial q_j}{\partial q_i}$ - вплив випуску продукції i-ої фірми на випуск продукції j-ої фірми.

Аналіз дуополії Курно заснований на передумові, що при плануванні своєї роботи кожен дуополіст вважає, що зміна в його власному випуску продукції не вплине на конкурента. Тоді стратегія Курно полягає в рішенні задачі (4.32) для $\dfrac{\partial q_j}{\partial q_i} = 0$. В цьому випадку отримуємо:

$$a - b(q_1 + q_2) - bq_i - c = 0, \quad i = 1,2 \tag{4.33}$$

чи

$$\left.\begin{aligned} a - b(q_1 + q_2) - bq_1 - c = 0, \\ a - b(q_1 + q_2) - bq_2 - c = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

Звідси отримуємо:

$$bq_2 - bq_1 = 0, \quad q_1 = q_2 \tag{4.35}$$

Підставивши $q_2 = q_1$ в (4.34), отримаємо:

$$q_1 = q_2 = \frac{a - c}{3b} \tag{4.36}$$

Це співвідношення називається *рівновагою Курно*.

Тоді ціна на продукцію і її загальний випуск обома фірмами згідно (4.28) і (4.29)

$$p = \frac{a+2c}{3}, \quad q = \frac{2(a-c)}{3b} \tag{4.37}$$

Цей результат узагальнимо на випадок N фірм :

$$\left.\begin{aligned} q_i &= \frac{a-c}{(N+1)b,} \quad i = \overline{1, N}, \\ p &= \frac{a+Nc}{N+1}, \quad q = \frac{N}{N+1} \cdot \frac{(a-c)}{b}. \end{aligned}\right\} \tag{4.38}$$

У межі, коли $N \to \infty$ (число фірм наближається до ∞) маємо з (4.38):

$$q_i \to 0, \quad p \to c, \quad q \to \frac{a-c}{b}$$

Економічний сенс: оскільки ціна не залежить від обсягу виробництва (кожна фірма виробляє нескінченно малу кількість продукції і тому не впливає на ціну товару), то при $N \to \infty$ *рівновага Курно прагне до рівноваги в умові досконалої конкуренції.*

Розглянемо динаміку випуску продукції при підході Курно, тобто процес переходу до стану рівноваги (4.36), записавши його так:

$$q_1 = \frac{a-c-bq_1}{2b}.$$

Оскільки $q_1 = q_2$ попереднє вираження можна записати таким чином:

$$q_1 = \frac{a-c-bq_2}{2b}.$$

Допустимо, що в деякий період часу обсяги виробництва обох фірм $q_1(t)$ і $q_2(t)$ не співпадають. В цьому випадку приведене вираження для обсягу виробництва першої фірми прийме вид:

$$q_1(t+1) = \frac{a-c-bq_2(t)}{2b}. \tag{4.39а}$$

Аналогічно маємо для другої фірми:

$$q_2(t+1) = \frac{a-c-bq_1(t)}{2b}. \tag{4.39б}$$

Вирази (4.39а) і (4.39б) є системою лінійних різницевих рівнянь першого порядку. Виключимо з (4.39а) $q_2(t)$. Для цього підставимо цю величину з (4.39б) і отримаємо після простого перетворення:

$$q_1(t+2) - \frac{1}{4}q_1(t) = \frac{a-c}{4b}. \tag{4.40}$$

Це вираження є лінійним різницевим рівнянням другого порядку. Для аналізу рішення (4.40) введемо оператор зсуву в часі вперед E: $Eq_1(t) = q_1(t+1)$, $E^2 q_1(t) = q_1(t+2)$ і так далі.

Однорідне різницеве рівняння, відповідне (4.40), отримаємо, прирівнявши його праву частину нулю:

$$q_1(t+2) - \frac{1}{4}q_1(t) = 0.$$

Використовуючи приведені співвідношення для оператора E, напишемо (4.40) в операторному виді:

$$\left(E^2 - \frac{1}{4}\right) q_1(t) = 0.$$

Звідси у зв'язку з тим, що $q_1(t)$ тотожно не дорівнює нулю (інакше перша фірма б не існувала), маємо з попереднього вираження

$$E^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

Цей вираз називається характеристичним рівнянням для різницевого рівняння (4.40), якщо розглядати у ньому E не як оператор, а як невідому величину. Рішення характеристичне рівняння (його корені) $E_1 = E_2 = \frac{1}{2}$.

Корені характеристичного рівняння дійсні і за абсолютною величиною менше одиниці. Говорять, що в цьому випадку вони лежать усередині одиничного кола на площині, що зображує дійсні і комплексні числа. Тому згідно теорії різницевих лінійних рівнянь рішення (4.40) стійке.

Приватним розв’язком (4.40) є константа

$$q_{p_1}(t) = q_{p_1} = \frac{a-c}{3b},$$

оскільки при підстановці $q_1(t) = q_{p_1}(t)$ в (4.40) це рівняння звертається в тотожність (тут індекс p - перша буква слова particular - приватний).

Через стійкість $q_1(t)$ - рішення (4.40):

$$q_1(t) \to q_{p_1} = \frac{a-c}{3b},$$

підтверджує стійкість динамічної системи (4.39а) і (4.39б).

При складнішій стратегії фірми, враховується можлива реакція конкурента, тобто допускається зміна випуску конкуруючою фірмою залежно від випуску даною фірмою.

Прикладом служить *аналіз Стекельберга*, коли одна або обидві фірми вважають, що вплив випуску однієї фірми на випуск іншої фірми відсутній.

Розглянемо ситуацію, коли при плануванні фірма 1 враховує вплив власного виробництва q_1 на випуск другою фірмою q_2, а фірма 2 не враховуватиме вплив свого виробництва q_2 на виробництво фірми 1 q_1, тобто в (4.32): $\frac{\partial q_2}{\partial q_1} \neq 0$, $\frac{\partial q_1}{\partial q_2} = 0$.

Тоді з (4.33) для $i = 2$ маємо:

$$q_2 = \frac{a - c - bq_1}{2b} \quad \left(\text{при } \frac{\partial q_1}{\partial q_2} = 0 \text{ в } (4.32)\right) \tag{4.41}$$

Звідси $\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = -\frac{1}{2}$.

Підставивши цю похідну у формулу (4.32), отримаємо для $i = 1,\ j = 2$:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = [a - b(q_1 + q_2)] - bq_1 + \frac{bq_1}{2} - c = 0.$$

Звідси отримуємо:

$$q_1 = \frac{a - c - bq_2}{(3/2)b} \text{ (при } \frac{\partial q_2}{\partial q_1} \neq 0\text{)} \tag{4.42}$$

Якщо фірма 2 насправді не враховуватиме впливи фірми 1 на її виробництво, то її випуск визначатиметься по формулі (4.41).

Рівняння (4.41) і (4.42) утворюють систему з двох лінійних рівнянь з двома невідомими. Вирішимо їх підстановкою.

Підставивши (4.41) в (4.42), отримаємо:

$$q_1 = \frac{a - c}{2b} \tag{4.43}$$

Підставивши цей вираз в (4.41), отримаємо:

$$q_2 = \frac{a - c}{4b} \tag{4.44}$$

У даній ситуації фірма 1 отримує прибуток більший, ніж фірма 2. Вираження (4.43) і (4.44) називається *рівновагою Стекельберга для першої фірми*. Аналогічно можна записати рівновагу Стекельберга для другої фірми:

$$q_1 = \frac{a - c}{4b}, \tag{4.45а}$$

$$q_2 = \frac{a - c}{2b}. \tag{4.45б}$$

Розглянемо тепер іншу ситуацію: насправді друга фірма не користується рівновагою Курно, а враховує вплив випуску продукції першої фірми на випуск своєї продукції. Інакше кажучи, кожна фірма неправильно припускає, що інша фірма не враховує вплив на свій випуск виробництво продукції конкуруючою фірмою. Це означає, що перша фірма, як і раніше, випускає свою продукцію згідно (4.42), а фірма 2 випускає свою продукцію по аналогічному вираженню:

$$q_2 = \frac{a - c - bq_1}{(3/2)b}. \tag{4.46}$$

Вирішимо систему лінійних рівнянь (4.42), (4.46) відносно q_1 і q_2 методом підстановки.

Підставивши вираження (4.46) в (4.42), отримуємо:

$$q_1 = \frac{a - c}{(5/2)b}. \tag{4.47}$$

Підставивши цей вираз в (4.41), отримаємо:

$$q_2 = \frac{a - c}{(5/2)b}.$$

Таким чином

$$q_1 = q_2 = \frac{a-c}{(5/2)b}.$$

Це вираження називається нерівновага Стекельберга, при якому обидві фірми отримують менший прибуток, чим при рівновазі Курно. Ця ситуація більше відповідає практиці.

Усі можливі ситуації представлені у вигляді матриці в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Матриця реакцій

Фірма 1	Фірма 2	
	Реакція Курно	Реакція Стекельберга
Реакція Курно	Рівновага Курно (4.36); (4.36)	Рівновага Стекельберга для 2-ої фірми (4.45а); (4.45б)
Реакція Стекельберга	Рівновага Стекельберга для 1-ої фірми (4.43);(4.44)	Нерівновага Стекельберга (4.47); (4.47)

Ця таблиця є матрицею реакцій конкурентів у відповідь на передбачуваний хід супротивника. Ця ситуація може бути розглянута з позицій теорії ігор.

Окрім приведених, можуть бути і інші рішення. Припустимо, що фірми прийшли до угоди максимізувати загальний прибуток (групова змова). Тоді загальний прибуток, вичислений згідно (4.31),

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = [a - b(q_1 + q_2)] \cdot (q_1 + q_2) - c(q_1 + q_2) - 2d \quad (4.48)$$

Нехай фірми прагнуть максимізувати загальний прибуток:

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2) \to \max.$$

Необхідна умова максимуму:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = \frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = [a - b(q_1 + q_2)] - b(q_1 + q_2) - c = 0.$$

Звідки слідує:

$$q_1 + q_2 = \frac{a-c}{2b}. \quad (4.49)$$

Таким чином, немає однозначного рішення: усі випуски, що задовольняють (4.49), оптимальні з точки зору вибраного критерію (4.48). Як трактувати таке рішення, див. рис. 4.1.

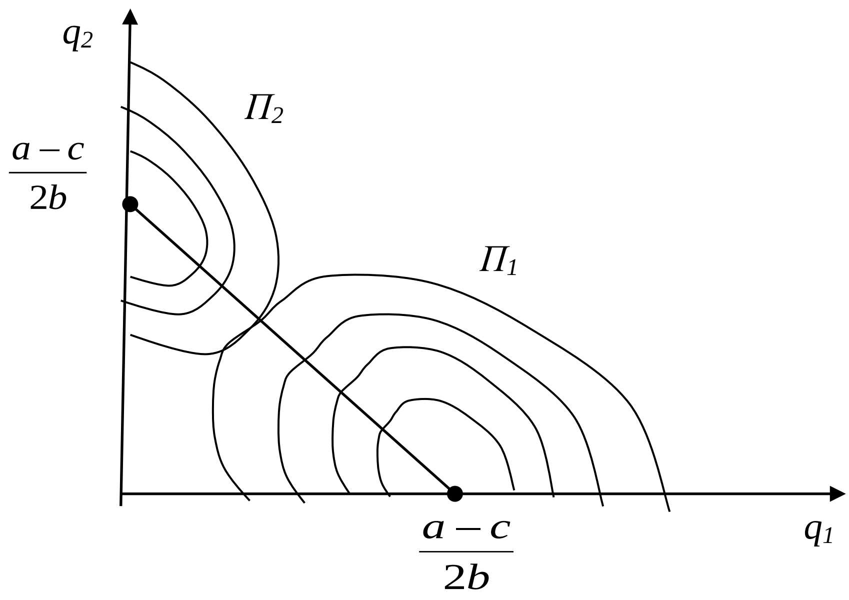

Рис. 4.1. Графічне трактування рішення задачі

Лінії рівного рівня прибутків обох фірм - криві другого порядку. Точки їх дотику лежать на прямій, що сполучає точки максимуму прибутків кожної фірми. Ці точки (на прямій) - неполіпшуванні: зменшення прибутку однієї фірми веде до зменшення прибутку інший. Такі точки називаються оптимальними рішеннями по Парето двохкритерійної задачі:

$П_1 \to \max$, $П_2 \to \max$.

Коли обидва критерії (обидві фірми) рівноцінні, їх можна згорнути в один критерій, як в (4.48). Помітимо, що рівноцінність критеріїв можливо розглядати як рівноцінність фірм.

Пряму на рис. 4.1 деякі автори називають договірною (чи компромісною): фірми, тільки домовившись, зможуть визначити обсяг свого виробництва.

4.5. Індивідуальне завдання №8

Визначення оптимальних затрат сировини та випуску продукції фірмою.

Студент повинен розв’язати наведену нижче задачу, вибравши дані для розрахунків (з табл. 4.2) за своїм номером у журналі групи.

4.5.1. Постановка задачі. Фірма при застосуванні $m=3$ видів сировини виробляє $n=2$ видів продукції. Випуск продукції і сировина для неї зв’язані формулами виробничих функцій

$$q_i = A_i x_1^{\alpha_i} x_2^{\beta_i} x_3^{\gamma_i}, \quad i=1,2 \qquad (4.50)$$

де q_i - об’єм випуску i-го виду продукції, $i=1,2$; x_j - кількість сировини j-го виду, $j=1,2,3$.

Коефіцієнти виробничих функцій в залежності від номеру варіанту наведені у табл. 4.2.

Таблиця 4.2.

Розрахункові дані

Номер варіанту	Коефіцієнти першої виробничої функції				Коефіцієнти другої виробничої функції			
	A_1	α_1	β_1	γ_1	A_2	α_2	β_2	γ_2
1	3	0,23	0,41	0,9	1,7	0,02	0,28	0,92
2	2,7	0,58	0,81	0,09	1,8	0,86	0,46	0,68
3	4	0,39	0,14	0,69	3,5	0,82	0,13	0,27
4	3,4	0,48	0,04	0,24	7,5	0,28	0,78	0,22
5	9,2	0,13	0,99	0,35	8,4	0,94	0,23	0,3
6	8,4	0,47	0,76	0,06	5,7	0,46	0,39	0,63
7	2,9	0,22	0,91	0,75	8,2	0,16	0,66	0,86
8	5,1	0,04	0,46	0,69	5,2	0,1	0,31	0,17
9	3,4	0,14	0,02	0,27	7	0,54	0,98	0,4
10	5,4	0,96	0,34	0,01	9,8	0,02	0,06	0,88
11	2,5	0,71	0,64	0,17	7,2	0,33	0,06	0,26
12	3,8	0,99	0,88	0,28	9,9	0,4	0,76	0,89
13	5,2	0,4	0,22	0,99	6	0,51	0,53	0,12
14	1,3	0,69	0,45	0,72	9,6	0,87	0,23	0,19
15	8,1	0,49	0,73	0	9,4	0,38	0,58	0,64
16	6,5	0,06	0,85	0,3	8,1	0,29	0,61	0,74
17	7,1	0,87	0,06	0,17	9,8	0,61	0,2	0,47
18	7,9	0,67	0,05	0,43	1,5	0,02	0,79	0,02

Номер варіанту	Коефіцієнти першої виробничої функції				Коефіцієнти другої виробничої функції			
	A_1	α_1	β_1	γ_1	A_2	α_2	β_2	γ_2
19	5,7	0,71	0,05	0,53	6,5	0,81	0,7	0,66
20	9,6	0,08	0,25	0,88	5	0,16	0,5	0,84
21	9,4	0,6	0,83	0,31	6,4	0,39	0,67	0,56
22	6,6	0,22	0,26	0,46	7,9	0,27	0,94	0,07
23	3,1	0,48	0,83	0,59	2,2	0,53	0,13	0,34
24	2,6	0,45	0,76	0,82	5,7	0,4	0,56	0,32
25	5	0,14	0,38	0,09	1,5	0,45	0,06	0,23
26	7,9	0,06	0,12	0,08	4,5	0,76	0,45	0,31
27	5	0,29	0,16	0,03	5,4	0,73	0,04	0,48
28	3,9	0,83	0,9	0,41	5,7	0,85	0,64	0,37
29	7,4	0,17	0,4	0,5	8,3	0,35	0,22	0,32
30	9,8	0,54	0,92	0,42	1,9	0,19	0,06	0,38

Вектори цін 1 т продукції p і сировини w у тис. грн. такі:

$$p = \begin{bmatrix} 2{,}21 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}, \; w = \begin{bmatrix} 10{,}2 \\ 21 \\ 8{,}7 \end{bmatrix}.$$

Необхідно визначити об'єм випуску обох видів продукції, та сировини трьох видів, що необхідні для отримання максимального прибутку.

4.5.2. Методичні вказівки. Порядок виконання роботи такий.

1. Розробити оптимізаційну модель, де шуканими змінними є q_i, $i = 1{,}2$; x_j, $j = 1{,}2{,}3$.
2. Вирішити задачу оптимізації за допомогою MS Excel.

5. МІЖГАЛУЗЕВИЙ БАЛАНС

Ідея міжгалузевого балансу вперше була запропонована у роботах радянських економістів у 1920-х роках, а потім отримала розвиток в працях американського вченого В.В. Леонтьєва. В подальшому модель В.В. Леонтьєва була узагальнена Джоном фон Нейманом.

5.1. Модель Леонтьєва.

Припустим, що весь виробничий сектор поділено на n - галузей (енергетика, машинобудівництво, сільське господарство та інші).

Позначимо x_i - випуск i-го продукту, c_i - кінцевий попит на цей продукт, a_{ij} - кількість j-го продукту, що йде на виробництво i-го продукту. Нехай є усього n продуктів, які виробляються різними галузями. Введемо матрицю $A = [a_{ij}]$, $i, j = \overline{1, n}$ розмірності $(n \times n)$ і n-мірні вектори x і c:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

де x - вектор випуску, c - вектор кінцевого попиту.

Тоді n-мірний вектор Ax - вектор випусків продуктів, які використовуються для виробництва інших продуктів.

Вектор випуску

$$x = Ax + c \tag{5.1}$$

Формула (5.1) має такий сенс.

Вектор випуску продуктів	=	Вектор продуктів для виробництва інших продуктів	+	Вектор кінцевого попиту

Рівняння (5.1) - *рівняння Леонтьєва*. З (5.1) слідує:

$$(J_n - A)x = c,$$

де J_n - одинична матриця n-го порядку.

Звідки вектор випуску

$$x = (J_n - A)^{-1} c.$$

Це рішення існує, якщо матриця $(J_n - A)$ має зворотню.

Матриця $(J_n - A)^{-1}$ називається *матричним мультиплікатором,* оскільки зміна кінцевого продукту на Δc викликає зміну випуску:

$$\Delta x = (J_n - A)^{-1} \Delta c$$

Розглядаючи модель Леонтьєва зробимо наступні припущення:

- незмінність технології виробництва (матриця $A = [a_{ij}]$, $i, j = \overline{1, n}$ постійна);
- лінійність існуючих технологій (для випуску j-ю галуззю продукції об'єму x необхідно $x \sum_i a_{ij}$ - ресурсів);
- не від'ємність матриці, яка задає модель Леонтьєва (згідно з економічним сенсом).

<u>Приклад 5.1.</u> Нехай матрицею $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$ задана модель Леонтьєва. Знайти обсяг виробництва, що забезпечує вектор споживання $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

<u>Рішення</u>.

Видно, що матриця моделі невироджена і сума елементів, наприклад першого рядка, менше одиниці. Отже, модель продуктивна. Знайдемо матрицю, зворотню до матриці $E - A$ (наприклад, методом мінору):

$$\left(\begin{matrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{matrix}\right|\to\left(\begin{matrix} 1/2 & -1/3 \\ -1/4 & 1/2 \end{matrix}\right|\to\left(\begin{matrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 \end{matrix}\right|\to\begin{pmatrix} 3 & 3/2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, зворотня матриця знайдена, залишилося помножити її на C. Маємо:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3/2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Знайдений вектор виробництва: $X = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$.

5.2. Модель Неймана.

5.2.1. Загальні відомості.

Вище розглядався лише один цикл виробництва-споживання. Для дослідження економіки, що міняється в часі можна використовувати більш загальну модель - модель Неймана.

Розглянемо економіку, що описується парою (C, K), де C - простір товарів, K - множина виробничих процесів, що переробляють деякі кількості товарів в інші кількості тих же товарів. При цьому під товаром (продуктом) розумітимемо як первинні чинники виробництва (земля, праця), сировину (нафта, вугілля), так і кінцеві продукти виробництва, послуги і тому подібне.

Нехай товарів усього n, тоді C є невід'ємний ортант n - мірного простору. Множина K виробничих процесів має у своїй основі кінцеве число процесів $(Q_1, \ldots, Q_m)$, які називаються базисними. Кожен базисний процес є парою векторів $Q_j = \left(A_j, B_j\right)$ з C. (Вектори A_j, B_j - це вектори-стовпці, але в цілях економії місця записуватимемо їх рядками.) Змістовний сенс процесу Q_j такий: він витрачає вектор $A_j = \left(a_{ij}\right)$ і випускає вектор $B_j = \left(b_{ij}\right)$, тобто переробляє вектор A_j у вектор B_j. По сенсу усі вектори A_j, B_j не від'ємні. Позначивши $A = (A_1, A_2, \ldots, A_m)$, $B = (B_1, B_2, \ldots, B_m)$ отримуємо, що технологія нашої моделі задається парою не від'ємних матриць A, B, матриця A - називається матрицею витрат, B - матрицею випуску. Комбінуючи базисні процеси, можна отримати нові процеси. Так, візьмемо не від'ємні числа z_j, $j = (1, \ldots, m)$ і визначимо новий виробничий процес $z_1 Q_1 + \ldots + z_m Q_m$, у якому витрати є вектор $\sum_{j=1}^{m} z_j A_j$, а випуск є вектор $\sum_{j=1}^{m} z_j B_j$; отриманий виробничий процес коротко позначимо через $\left(AZ, BZ\right)$. Вектор-стовпець $Z = \left(z_j\right)$ називається вектором *інтенсивностей.* Ширшу множину процесів, що вийшла, позначимо K.

Можна помітити, що в той час, як базисні процеси $Q_1, \ldots, Q_m$, відповідають, взагалі кажучи, реальним галузям, заводам, фабрикам, кожен елемент $\left(X, Y\right) \in K$ є деякий процес, що описує певний режим спільної роботи цих галузей, заводів, фабрик. При цьому X є вектор витрат, Y - вектор випуску.

Приклад 5.2. Нехай $Q_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ - два базисні процеси і вектор інтенсивностей. Знайти вектори витрат і випуску.

Рішення.

Тут $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ спільної роботи є

$(AZ, BZ) = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$.

Отже, вектори витрат і випуску є $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 9 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Розглянута раніше модель Леонтьева дійсно є окремий випадок моделі Неймана при $n = m$, $B = E$. Основна відмінність моделі Неймана полягає в тому, що всякий базисний процес може випускати не один товар. Ясно також, що модель Неймана лінійна.

Перейдемо тепер до опису динаміки моделі Неймана. Розглянемо T періодів часу, наприклад, років. У кожний, t - й період для виробництва продукції застосовується один з процесів множини K, що характеризується вектором інтенсивностей $Z^{(t)}$

5.2.2. Замкнутість моделі Неймана.

Окрім лінійності, припустимо ще, що модель Неймана замкнута. Це означає, що для виробництва в $(t+1)$-й період $(t, t+1)$ можна витрачати лише ті товари, які були вироблені в попередній t-й період. Оскільки випуск в t -й період рівний $B - Z^{(t)}$, а витрати в $(t+1)$-й період рівні $AZ^{(t+1)}$, то математично, припущення про замкнутість моделі Неймана записується у вигляді серії нерівностей:

$$AZ^{(1)} \leq S$$

$$\vdots$$

$$AZ^{(t+1)} \leq BZ^{(t)}, \ldots, T-1$$

Вектор S є вектором запасів, наявних на початок усього планового періоду $[0, T]$. Послідовність векторів $Z^{(1)}, \ldots, Z^{(t)}$, що задовольняють вказаним вище нерівностям називатимемо (допустимим) планом з початком S і означати $\{Z^t\}$.

<u>**Приклад 5.3.**</u> Переконаємося, що в моделі Неймана з попереднього прикладу з початковим рівнем запасів $S = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ план $Z_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Z_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ допустимий.

<u>Рішення</u>.

Перевіримо виконання нерівностей: $A \cdot Z^{(1)} \leq S$ і $A \cdot Z^{(2)} \leq B \cdot Z^{(1)}$.

Вони насправді виконуються: $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \end{pmatrix}$.

5.2.3. Правило нульового доходу і його трактування.

При дослідженні планів в моделі Неймана корисно ввести поняття цін на товари.

Нехай $p_{(t)}^{i}$ - ціна однієї одиниці i -го товару в t -й період. Відповідний вектор цін P_t є вектор-рядок. Величина $P_{(t+1)}B_j - P_{(t)}A_j$ виражає дохід процесу Q_j за t -й період. Таким чином, на початку t-го періоду на закупівлю сировини у кількості A_j витрачаються засоби за цінами $P_{(t)}$ цього періоду, потім вироблена продукція B_j продається вже за цінами $P_{(t+1)}$ наступного періоду. Звичайно, вектори цін не від'ємні.

Основне припущення відносно цін при дослідженні моделі Неймана полягає в наступному: ніякий з процесів не приносить позитивного доходу:

$$P_{(t+1)}B_j - P_{(t)}A_j \le 0, \; j=1,\dots,m; \quad t=1,\dots,T-1$$

або
$$P_{(t)}A \ge P_{(t+1)}B, \quad t=1,\dots,T-1 \tag{5.2}$$

Можна по-різному відноситися до змістовного трактування цього припущення. Іноді говорять, що ціни є лише математичним інструментом при доказі фактів відносно цієї моделі. Тоді, звичайно, відносно цін можна робити будь-які припущення, корисні для подальшого. Проте можна спробувати надати величинам $P_{(t)}$ змістовний сенс, трактуючи їх як реальні ціни і тлумачивши отримані математичні факти про них, як рекомендацію про раціональну структуру цін на товари.

Наведену вище умову (5.2) часто називають *правилом нульового доходу*. На перший погляд, воно виглядає парадоксально. Насправді, який сенс підприємцю здійснювати виробництво, якщо воно неприбуткове? Проте цей парадокс що здається. Річ у тому, що величини доходу $P_{(t+1)}B_j - P_{(t)}A_j$ j-го процесу відносяться до різних моментів часу. Допустимо, що власник фірми має капітал R на початку t -го періоду. На цю суму він закуповує сировину, виробляє товари і продає їх. При нульовому доході він знову має капітал R. Проте ціни можуть стати іншими, наприклад, нижче. Тоді та ж сума R матиме більшу купівельну спроможність. У моделі Неймана справа йде саме так.

Можна було вважати, що прибуток кожного процесу обмежений згори одним і тим же числом, загальним для усіх галузей. Але це і є основний зміст правила нульового доходу: максимально можливий прибуток в усіх галузях однаковий. При такій трактовці правило нульового доходу є лише інша форма знаменитої гіпотези Адама Сміта про тенденцію вирівнювання норми прибутку в різних галузях народного господарства при його нормальному функціюванні.

5.2.4. Стаціонарні траєкторії в моделі Неймана.

Повернемося до цін. Їх послідовність $P_{(t)}, t=1,\dots T$, що задовольняє системі нерівностей (5.2), називатимемо *траєкторією цін* і позначимо $\{P_{(t)}\}$. Тепер напишемо таке припущення, що загальна маса грошей не змінюється і постійно є в обігу:

$$P_{(t)}AZ^{(t)} = P_{(t+1)}BZ^{(t)}, t=1,\dots T-1 \tag{5.3}$$

тобто продукції продається рівно на стільки, на скільки було куплено сировини (нагадаємо, що продукція, вироблена в t -му періоді, продається за цінами наступного $(t+1)$-го періоду), а уся виручка від продажу продукції йде на придбання сировини в наступному періоді:

$$P_{(t+1)}BZ^{(t)} = P_{(t+1)}AZ^{(t+1)}, t=1,\dots,T-1. \tag{5.4}$$

Важливу роль при вивченні траєкторій інтенсивностей $\{Z^{(t)}\}$ і цін $\{P_{(t)}\}$ грають найпростіші з можливих динамічних траєкторій, так звані стаціонарні.

Траєкторія інтенсивностей $\{Z^{(t)}\}$ називається стаціонарною, якщо існує таке число $v>0$, що $Z^{(t+1)}=vZ^{(t)}$ або, що те ж саме, $Z^{(t)}=v^{t-1}Z^{(1)}, t=1,\ldots T$. Позначатимемо її $\{v,Z\}$, де $Z=Z^{(t)}$.

Сенс стаціонарної траєкторії дуже простий: інтенсивність наступного періоду в одне і те ж число разів або на одне і те ж число відсотків більше інтенсивності цього періоду.

Для того, щоб послідовність $Z^{(t)}=v^{(t-1)}Z^{(t)}$ була стаціонарною траєкторією інтенсивностей, необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність $vA\cdot Z\le B\cdot Z$.

Дійсно, замкнутість моделі Неймана виражається нерівностями $AZ^{(t+1)}\le BZ^{(t)}$, і якщо $Z^{(t+1)}=vZ^{(t)}$ то ці (необхідні!) нерівності виконуються. Навпаки, якщо $vA\cdot Z\le B\cdot Z$ то, вважаючи $Z^{(t+1)}=vZ^{(t)}=v^{t-1}Z^{(1)}$ отримаємо стаціонарну траєкторію інтенсивностей. Назвемо траєкторію цін $\{P_{(t)}\}$ стаціонарною, якщо існує таке число $\mu>0$, що $\mu P_{(t+1)}=P_{(t)}$ чи $\mu^{t-1}P_{(t)}=P$, де $P=P_{(t)}$. Позначатимемо її $\{P,\mu\}$.

Як і у разі стаціонарних траєкторій інтенсивностей, можна переконатися, що послідовність цін $P_{(t)}=P/\mu^{t-1}$ буде стаціонарною траєкторією цін тоді і тільки тоді, коли $\mu PA\ge PB$.

Сенс стаціонарної траєкторії дуже простий: ціни падають від періоду до періоду в одне і те ж число разів або на одне і те ж число відсотків.

Для стаціонарних траєкторій інтенсивностей $\{v,Z\}$ і цін $\{P,\mu\}$ рівності (5.3) і (5.4), що виражають припущення про незмінність загальної маси грошей і те, що вони усі знаходяться в обігу, мають наступний вигляд: $\mu PAZ=PBZ$ і $vPAZ=PBZ$.

5.2.5. Динамічна рівновага в моделі Неймана.

Говорять, що модель Неймана знаходиться в стані динамічної рівноваги, яка задається параметрами (λ,Z,P), де λ - позитивне число, Z,P - не від'ємні ненульові вектори, якщо виконані умови:

$$\begin{gathered}\lambda AZ\le BZ\\ \lambda PA\ge PB\\ \lambda PAZ=PBZ.\end{gathered}\tag{5.5}$$

Величина PBZ, є вартість випуску в стані рівноваги моделі Неймана. Вона повинна бути ненульовою. Відмітимо, що P і Z можна пронормувати, наприклад можна вважати, що компоненти кожного з цих векторів в сумі дають одиницю, тобто вони задають структуру векторів інтенсивностей і цін.

За яких умов існує рівновага в моделі Неймана? Нейман знайшов такі умови, але вони не допускають хороші економічні інтерпретації і згодом були замінені більше сприятливими умовами іншими дослідниками. Ось типова теорема, що відбиває цей напрям.

Теорема. Нехай в матриці A немає нульових стовпців, а в матриці B немає нульових рядків. Тоді існує рішення системи (5.5), тобто динамічна рівновага, що має наступні властивості:

$$\begin{aligned} &1)\ PBZ > 0; \\ &2)\ \lambda a_k Z < b_k Z \rightarrow p_k = 0; \\ &3)\ \lambda P_j A > P_j B \rightarrow z_j = 0; \end{aligned} \tag{5.6}$$

де a_k, b_k - k-і рядки, A_j, B_j - j-і стовпці матриць A, B.

Умови теореми допускають економічне трактування. Вимога відсутності нульових стовпців в матриці A означає, що немає процесів, які нічого не витрачають. Вимога відсутності нульових рядків в матриці B означає, що всякий продукт виробляється в розглянутій моделі, що теж природно через її замкнутість.

Зупинимося тепер на економічному сенсі і суті динамічної рівноваги:

- якщо $PBZ > 0$ це означає, що стан рівноваги не вироджений, тобто що вартість випуску ненульова;
- $\lambda \alpha_k < Z < b_k Z$ означає, що k-й продукт виробляється в більшій кількості, чим використовується, значить, є і накопичуються його залишки і тому ціна p_k на нього дорівнює нулю.

Якщо ж $\lambda PA_j > PB_j$ то j-й процес споживає більше товарів за вартістю, чим виробляє, отже, він невигідний і інтенсивність його застосування z_j дорівнює нулю.

5.3. Індивідуальне завдання №9

Визначення плану і виробничої програми цехів по балансовій моделі підприємства.

Студент повинен розв'язати наведену нижче задачу, вибравши дані для розрахунків (з табл. 5.1) за своїм номером у журналі групи.

5.3.1. Постановка задачі. Хімічне підприємство складається з восьми цехів, кожний із яких випускає свій вид продукції. У таблиці 1 зазначені видаткові коефіцієнти a_{ik} одиниць продукції i–го цеху, використовуваних як сировина (проміжний продукт) для випуску одиниці продукції k–го цеху, а також кількість одиниць продукції y_i i–го цеху, призначених для реалізації (кінцевий продукт). Визначити:

1. План випуску готової продукції для кожного цеху $\overline{X} = (x_1 x_2 \cdots x_8)$.
2. Обсяг випуску продукції внутрішньозаводського споживання $X = (x_1 x_2 \cdots x_8)$

Таблиця 5.1

Розрахункові дані

Цех	Видаткові коефіцієнти								Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	0,1	0,05	0,02	0,2	0	0,3	0,1	0	200
2	0,01	0,02	0,05	0,2	0,1	0	0,01	0,05	300
3	0,2	0,2	0,08	0,08	0,05	0	0,1	0,2	488
4	0,01	0,02	0,05	0,1	0,15	0,18	0,19	0	688
5	0,2	0,01	0,5	0,08	0,1	0,15	0	0	255
6	0	0	0,2	0	0	0	0	0	135
7	0,3	0	0	0,3	0	0	0	0	258
8	0	0,1	0,2	0	0	0	0	0	132

5.3.2. Методичні вказівки. Балансова модель підприємства, що відбиває взаємозв'язку між цехами, має вид:

$$x_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{i8}x_8) = y_i, \text{ де } i=1,2,3,...,8$$

У матричній формі балансова модель рекомендується:

$$\overline{X} - A\overline{X} = \overline{Y}, \text{ де}$$

A - матриця видаткових коефіцієнтів, що будується по таблиці даних;

$Y = (y_1 y_2 \ldots y_8)$ - вектор кінцевих продуктів кожного цеху.

Неважко одержати план випуску продукції:

$$\overline{X} = (E - A)^{-1} Y, \text{ де } E \text{ - одинична матриця.}$$

Очевидно, що виробнича програма визначається виразом: $\overline{X'} = A\overline{X}$

5.4. Індивідуальне завдання №10
Визначення об'ємів ресурсів для виконання виробничої програми

Студент повинен розв’язати наведену нижче задачу, вибравши дані для розрахунків (з табл. 5.2) за своїм номером у журналі групи.

5.4.1. Постановка задачі. Використовуючи результати індивідуального завдання №9 і дані таблиці 5.2 визначити:

1. Сумарну витрат сировини, палива і трудових ресурсів на виконання виробничої програми;
2. Витрату палива, сировини і трудових ресурсів по цехах;
3. Виробничі витрати (у грн.) по цехах і на усю виробничу програму заводу;
4. Виробничі витрати на одиницю кінцевої продукції

Таблиця 5.2

Розрахункові дані

Номер цеху	Сировина 1 норма витрат	Сировина 2 норма витрат	Сировина 3 норма витрат	Паливо норма витрат	Праця норма витрат
цех 1	0,11	1,37	0,59	1,38	16,98
цех 2	0,93	0,35	0,99	0,43	15,04
цех 3	0,74	0,49	0,33	2,34	14,54
цех 4	0,16	2,36	1,22	1,09	17,60
цех 5	0,90	1,83	1,18	0,46	10,82
цех 6	0,38	2,05	0,12	2,32	17,82
цех 7	0,15	1,51	1,54	2,41	10,27
цех 8	0,87	1,14	1,53	2,51	17,35
Вартість	5	12	16	2,5	2,5

Порядок виконання роботи такий.

1. Постановка задачі
2. Розрахунок задачі у виді документа Excel із докладними коментарями ходу виконання роботи
3. Висновки по роботі.

Оформити звіт у виді електронного документа

6. ОДНОСЕКТОРНА МОДЕЛЬ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ (ДИСКРЕТНИЙ АНАЛОГ МОДЕЛІ СОЛОУ)

6.1. Побудова моделі

Солоу запропонував безперервну динамічну модель, що адекватно описує найважливіші показники процесу розширення виробництва. У цьому методичному посібнику приводиться дискретний аналог моделі Солоу.

Вважатимемо, що стан економіки заданий наступними величинами, що є дискретними функціями часу:

Y_t - об'єм кінцевого продукту;

C_t - фонд безперервного споживання;

S_t - валовий фонд накопичення;

L_t - об'єм трудових ресурсів;

K_t - об'єм основних фондів.

Передбачається, що ресурси K_t, L_t використовуються повністю в період часу t.

Задаємо об'єм кінцевого продукту у вигляді виробничої функції:

$$Y_t = F(K_t, L_t), \tag{6.1}$$

Причому,

$$Y_t = C_t + S_t, \tag{6.2}$$

Фонд накопичення представляє частину кінцевого продукту:

$$S_t = sY_t \tag{6.3}$$

де $s = const$ - норма накопичення, $0 < s < 1$.

Чистий приріст основних фондів:

$$K_{t+1} - K_t = \Delta K_t .$$

Вважатимемо, що величина вибуття основних фондів пропорційна їх об'єму з постійним в часі коефіцієнтом μ. Таким чином, підлягає відновленню в t-му періоді μK_t основних фондів. Отже, фонд накопичення дорівнює:

$$S_t = K_{t+1} - K_t + \mu K_t,\ 0 < \mu < 1,\ \mu = const \tag{6.4}$$

Рівняння динаміки робочої сили отримаємо, виходячи з умови, що приріст робочої сили пропорційний її об'єму:

$$L_{t+1} - L_t = gL_t, \quad g = const \tag{6.5}$$

Нижче розглядаються виробничі функції лінійно однорідні при усіх K_t, L_t. Ця властивість полягає в тому, що для будь-якого $a > 0$ має місце співвідношення:

$$F(aK_t, aL_t) = aF(K_t, L_t).$$

З урахуванням властивості лінійної однорідності виробничої функції отримуємо з (6.1):

$$Y_t = F(K_t L_t) = L_t f(k_t), \tag{6.6}$$

де $k_t = \dfrac{K_t}{L_t}$ - фондоозброєність праці. Функція $f(k)$ встановлює залежність об'єму кінцевого продукту від фондоозброєності.

Для виробничої функції Кобба-Дугласа $f(k) = Ak^{\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$.

Для виробничої функції CES (constant elasticity of substitution - постійна еластичність заміщення) $f(k) = (ak^{-\beta} + b)^{-\frac{\alpha}{\beta}}$.

Виробнича функція Кобба-Дугласа - окремий випадок виробничої функції CES.

Різницеве рівняння для опису зміни k_t в часі має наступний вигляд:

$$(1+g)k_{t+1} + (\mu - 1)k_t = sf(k_t) \qquad (6.7)$$

Звідси приріст фондоозброєності:

$$k_{t+1} - k_t = -gk_{t+1} - \mu k_t + sf(k_t).$$

Нехай $k_t = k^*$ для $t \geq 0$ (система розвивається з постійною фондоозброєністю). З цієї умови і різницевого рівняння (6.7) отримуємо рівняння для визначення k^*

$$\eta k = sf(k), \qquad (6.8)$$

де $\eta = g + \mu$. Тут μ - коефіцієнт вибуття основних фондів; коефіцієнт g характеризує зростання робочої сили.

Існування рішення рівняння (6.8) визначається наступною теоремою.

Теорема 6.1. Якщо $\dfrac{\eta}{s} < \left.\dfrac{df(k)}{dk}\right|_{k=0}$, то існує єдине значення $k^* > 0$, для якого $k_t = k^*$ для $t \geq 0$.

Рішення рівняння (6.8) ілюструє рис.6.1.

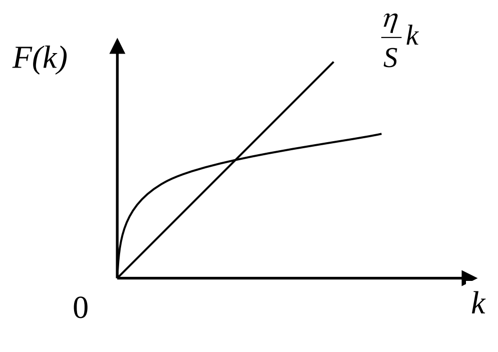

Рис. 6.1

Для виробничої функції Кобба-Дугласа рішення рівняння (6.8) для $k > 0$ матиме вигляд:

$$k^* = \left(\frac{\eta}{sA}\right)^{\frac{1}{\alpha - 1}}.$$

6.2. Характеристики стаціонарної траєкторії.

Стаціонарна траєкторія - зміна макроекономічних характеристик в часі при постійній фондоозброєності.

Під характеристиками розуміється: об'єм основних фондів K_t, об'єм трудових ресурсів L_t, об'єм кінцевого продукту Y_t. Зміна цих характеристик в часі, що задається відповідно дискретними функціями K_t, L_t, Y_t описує стаціонарну траєкторію. Ця траєкторія відповідає постійній фондоозброєності $k_{t^*} = k^*$, $t = 0,1,2$.

Величина k^* - рішення різницевого рівняння дискретної моделі Солоу, знаходиться з рішення рівняння (6.8). З визначення фондоозброєності і з урахуванням того, що вона є постійною в часі величиною, слідує:

$$k_0 = k^* = \frac{K_0}{L_0},$$

де k_0 - фондоозброєність праці в початковий момент часу; L_0 - об'єм трудових ресурсів в початковий момент часу; K_0 - об'єм основних фондів в початковий момент часу.

З рівняння (6.7) виходять наступні вирази для функцій K_t, L_t, Y_t.

Об'єм трудових ресурсів:

$$L_{t+1} = L_0(1+g)^t,\ t = 0,1,2, \tag{6.9}$$

де L_0 - об'єм трудових ресурсів в початковий момент часу;

Об'єм основних фондів:

$$K_{t+1} = K_0(1+g)^t, \tag{6.10}$$

де K_0 - об'єм основних фондів в початковий момент часу.

Об'єм кінцевого продукту :

$$Y_{t+1} = Y_0(1+g)^t, \tag{6.11}$$

де Y_0 - об'єм кінцевого продукту в початковий момент часу.

Усі вказані характеристики ростуть з постійним темпом зростання $(1+g)$. При цьому постійні:

середня продуктивність праці $\dfrac{Y_t}{L_t} = f(k^*)$,

середня фондовіддача $\dfrac{Y_t}{K_t} = k^{-1} f(k^*)$.

фонд споживання на 1 зайнятого $c = \dfrac{C_t}{L_t} = (1-s) f(k^*)$.

Ця траєкторія є стійкою, що затверджується в наступній теоремі.

Теорема 6.2. При будь-якій величині фондоозброєність в початковий момент часу $t=0$, $k_0>0$, $k_0 \neq k^*$, рішення рівняння (6.7) $k_t \to k^*$ при $t \to \infty$. Збіжність монотонна, див. рис. 6.2

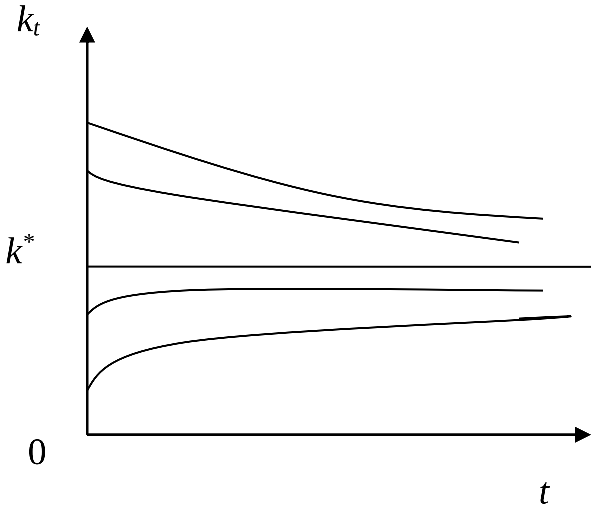

Рис. 6.2

6.2.1. Оптимізація процесу розвитку економічної системи. Оптимальна постійна норма накопичення.

Величина k^* - постійної фондоозброєності залежить від параметрів s, g, μ, що ілюструє рисунок 6.3.

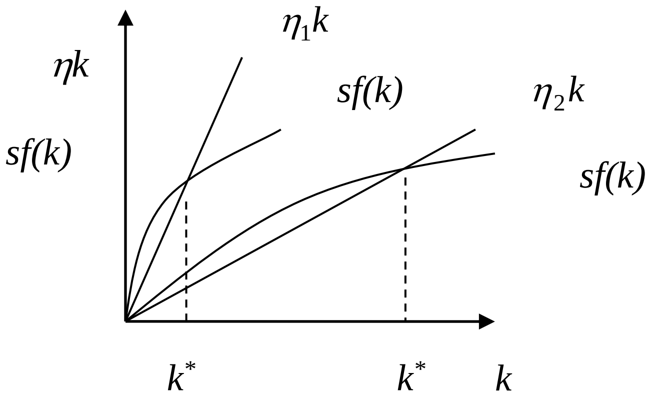

Рис. 6.3

Нехай варіюється один параметр - норма накопичення s. Знайдемо оптимальну величину s. Як критерій оптимальності виберемо споживання на одного працюючого c. З цією метою вирішимо задачу

$$c = f(k^*(s)) - \eta k^*(s) \to \max . \qquad (6.12)$$

Необхідна умова максимуму для задачі (6.12):

$$\frac{dc}{ds} = 0, \tag{6.13}$$

З формул (6.12) і (6.13) отримуємо:

$$\frac{dc}{ds} = \frac{df(k^*(s))}{dk^*} \cdot \frac{dk^*}{ds} - \eta \frac{dk^*(s)}{ds} = 0.$$

У зв'язку з тим, що фондоозброєність залежить від норми накопичення, $\dfrac{dk^*}{ds} \neq 0$. Тому

$$\frac{df(k^*(s))}{dk^*} - \eta = 0, \tag{6.14}$$

Значення $k^* = \tilde{k}$, що задовольняє рівнянню (6.14), знаходиться з цього рівняння при підстановці в нього конкретного значення виробничої функції $f(k)$. Згідно (6.8) і (6.14) оптимальне значення s, відповідне оптимальній фондоозброєності $k^* = \tilde{k}$, визначається таким чином:

$$\tilde{s} = \frac{\eta k^*}{f(k^*)} = \frac{\dfrac{df(k^*(\tilde{s}))\tilde{k}}{dk^*}}{f(k^*(\tilde{s}))}, \tag{6.15}$$

де $k^*(\tilde{s}) = \tilde{k}$.

Розглянемо економічний сенс $\tilde{s}$. З цією метою введемо поняття еластичності функції.

Еластичністю функції n змінних $y = f(x)$, де вектор $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \end{bmatrix}$, по змінній x_i називається величина

$$Э_{x_i}^{f} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f(x)}. \tag{6.16}$$

Визначимо еластичність виробничої функції, яка задає об'єм кінцевого продукту $Y = F(K, L)$, див. (6.1), за об'ємом капітальних вкладень K. Згідно (6.16) ця величина:

$$Э_K^F(K, L) = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} \cdot \frac{K}{F(K, L)}.$$

У зв'язку з тим, що в цьому методичному посібнику розглядаються виробничі функції лінійно однорідні при усіх K, L згідно (6.6) маємо $F(K, L) = Lf(k)$. Звідси

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = L\frac{df(k)}{dK} = \frac{df(k)}{dk}, \quad \frac{K}{F(K, L)} = \frac{kL}{Lf(k)} = \frac{k}{f(k)}.$$

З останніх двох виразів і (6.15) отримуємо

$$Э^F_{\tilde{K}}(\tilde{K},\tilde{L}) = \tilde{s},$$

де $K = \tilde{K}, L = \tilde{L}$ такі, що $\tilde{K}/\tilde{L} = k^*(\tilde{s}) = \tilde{k}$.

Для виробничої функції Кобба-Дугласа $F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ або $f(k) = Ak^{\alpha}$. Звідси згідно (6.15)

$$\tilde{s} = \alpha .$$

Отже, для цієї функції $Э^F_{\tilde{K}}(\tilde{K},\tilde{L}) = \alpha$: еластичність виробничої функції по основних фондах дорівнює оптимальній нормі накопичення.

Описаний підхід до оптимізації норми споживання запропонований Э. Фелпсом і відомий як "золоте правило" економічного зростання.

На рис.6.4 графічно показаний сенс визначення оптимальної норми накопичення.

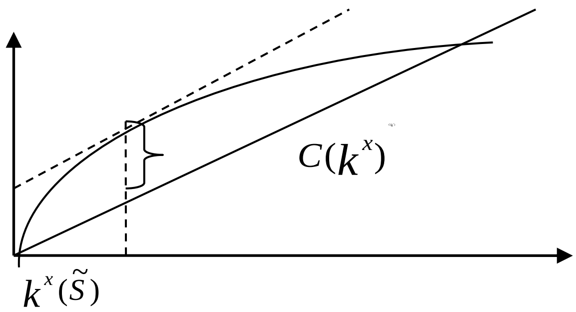

Рис.6.4

6.3. Індивідуальне завдання №11Одинсекторна модель економічної динаміки (дискретний аналог моделі Солоу)

Студент повинен розв'язати наведену нижче задачу, вибравши дані для розрахунків (наведені у табл. 6.1) за своїм номером у журналі групи.

6.2.1. Постановка задачі. Визначити фондоозброєність постійну в часі, яка є розв'язком моделі Солоу.

6.2.2. Методичні вказівки. Модель Солоу має вигляд $(1+g)k_{t+1}+(\mu-1)k_t = sf(k_t)$. Функція Кобба –Дугласа $f(k) = Ak^{\alpha}$.

Вирішити різницеве рівняння (Модель Солоу) за допомогою Excel для k_0 = 0,1*N, де N - номер студента по журналу, t змінюється від 1 до 30, виразив k_{t+1} з (Моделі Солоу). Побудувати графік функції.

Таблиця 6.1

Розрахункові дані

Варіант	g - зростання робочої сили	μ- коефіцієнт вибуття основних фондів $0<\mu<1$	s - норма накопичення $0<s<1$	Параметр виробничої функції
1	0,1	0,8	0,4	Кобба-Дугласа, A=16 α=0,2
2	0,4	0,7	0,9	Кобба-Дугласа, A=20 α=0,9
3	1,3	0,2	0,1	Кобба-Дугласа, A=8 α=0,6
4	2,0	0,3	0,2	Кобба-Дугласа, A=12 α=0,4
5	0,5	0,8	0,8	Кобба-Дугласа, A=18 α=0,5
6	0,9	0,9	0,6	Кобба-Дугласа, A=14 α=0,2
7	1,2	0,5	0,5	Кобба-Дугласа, A=10 α=0,7
8	0,8	0,1	0,3	Кобба-Дугласа, A=16 α=0,3
9	0,3	0,8	0,2	Кобба-Дугласа, A=16 α=0,9
10	1,5	0,4	0,7	Кобба-Дугласа, A=20 α=0,6
11	1,9	0,6	0,6	Кобба-Дугласа, A=12 α=0,2
12	1,0	0,5	0,1	Кобба-Дугласа, A=8 α=0,5
13	0,2	0,1	0,3	Кобба-Дугласа, A=18 α=0,2
14	0,8	0,2	0,8	Кобба-Дугласа, A=6 α=0,8
15	2,1	0,7	0,9	Кобба-Дугласа, A=20 α=0,5
16	0,3	0,5	0,4	Кобба-Дугласа, A=14 α=0,4
17	0,5	0,3	0,5	Кобба-Дугласа, A=16 α=0,3
18	2,0	0,6	0,7	Кобба-Дугласа, A=12 α=0,7
19	1,5	0,6	0,2	Кобба-Дугласа, A=12 α=0,8
20	0,3	0,2	0,3	Кобба-Дугласа, A=20 α=0,9
21	0,6	0,5	0,8	Кобба-Дугласа, A=10 α=0,5

ВИСНОВОК

У цьому навчальному посібнику розглянуті:

- загальні питання моделювання об'єктів;
- питання математичного моделювання економічних явищ;
- питання раціонального господарювання і ведення економіки;
- задачі на безумовний мінімум;
- задачі на умовний мінімум;
- задачі оптимізації з обмеженнями-рівностями;
- задачі оптимізації з обмеження нерівностями;
- етапи рішення задачі оптимізації;
- задачі багатокритерійної оптимізації;
- задачі визначення оптимального плану випуску продукції гірсько-збагачувальним комбінатом;
- задачі визначення оптимального плану випуску продукції косметичною фірмою;
- задачі складання оптимального інвестиційного портфелю цінних паперів в умовах невизначеності;
- вектори простору товарів;
- аксіоми відношення віддання переваги;
- матриця Гессе;
- функцій корисності;
- задача оптимального споживання;
- зрівняльна статика споживання;
- задача перевірки функції корисності;
- принцип застосування павутиноподібної моделі ринку;
- пошук точки рівноваги за допомогою павутиноподібній моделі ринкового товару;
- визначення плану і виробничої програми цехів по балансовій моделі підприємства;
- визначення об'ємів ресурсів для виконання виробничої програми;
- параметри виробничої функції;
- аксіоми для моделі виробництва;
- рішення довгострокової та короткострокової задач планування для фірми;
- питання недосконалої конкуренції;
- питання монополія і монопсонія;
- конкуренція серед небагатьох;
- олігополія і олігопсонія;
- типові методи визначення оптимальних затрат сировини та випуску продукції фірмою;
- міжгалузевий баланс;
- односекторна модель економічної динаміки (дискретний аналог моделі Солоу).

З опорою на матеріал навчального посібника студент повинен уміти:

- формулювати задачу оптимального споживання для різних функцій корисності;

- давати економічне трактування результатів рішення задач оптимального споживання;
- вирішувати задачу оптимального споживання;
- розуміти відношення віддання переваг і байдужості, пристосовуючи до конкретних ситуацій;
- розуміти нерівність Слуцького;
- розуміти сенс функції Кобба-Дугласа;
- визначати величину еластичності функції і розуміти сенс цього поняття;
- формулювати задачу планування виробництва;
- формулювати моделі для різних ринків сировини і готової продукції;
- скласти динамічну модель випуску продукції при підході Курно;
- пояснити суть аналізу Стекельбера;
- трактувати групову змову для двох фірм, як двох критеріальну оптимізаційну задачу;
- трактувати основні поняття міжгалузевого балансу;
- пояснити економічну суть павутиноподібної моделі;
- наводити приклади застосування міжгалузевого балансу;
- складати лінійні динамічні моделі з дискретним часом;
- оцінювати придатність використання моделі Неймана для вирішення задач макроекономіки;

Сформульовані вище учбові цілі дають об'єктивну можливість однозначно судити про міру досягнення їх як при самоконтролі, так і при зовнішньому контролі засвоєння учбового матеріалу.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

2. ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ В ЕКОНОМІЦІ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ

Загальний вигляд задачі оптимізації:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \to \min, \\ g_i(x) \le b_i, i = 1, \ldots, m, \end{array}\right\} \quad (2.1)$$

Градієнт функції:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Необхідною умовою мінімуму в задачі на безумовний тип:

$$\nabla f(x) = O_n \quad (2.3)$$

Функції Лагранжа:

$$L = f(x) + \lambda_1(g_1(x) - b_1) + \lambda_2(g_2(x) - b_2) + \ldots + \lambda_m(g_m(x) - b_m) =$$
$$= f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(x) - b_i), \quad (2.4)$$

Необхідні умови для мінімуму

$$L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \to \min,$$
$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Необхідною умовою мінімуму задачі (2.5) буде:

$$\nabla_{x,\lambda} L = O_{n+m}$$

Із заданої умови виходить група умов:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0, \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0 \end{array}\right\} \quad (2.7)$$

Умови для рішення задачі оптимізації з обмеженнями нерівностями:

$$\lambda_i \ge 0, \lambda_i \lfloor g_i(x) - b_i \rfloor = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \quad (2.8)$$

Принцип рішення двохкритерійних задач. Обидва критерії згортаються в один: $\begin{cases} f_1(x)+rf_2(x)\to \min \\ g_i(x)\le b_i, i=1,\dots,m \end{cases}$	(2.9)
Метод поступок: $\begin{cases} f_1(x)\to \min \\ f_2(x)\le \Delta \\ g_i(x)\le b_i, i=1,\dots,m \end{cases}$	(2.10)
Залежність між ціною *C* и обсягом продажів *Y*: $C=a_0+a_1y$	(2.11)
Зв'язок між витратами *I* і обсягом продажів у виді рівнянь регресії: $I=b_0+b_1y+b_2y^2+b_3y^3$	(2.12)
Доход: $D=Cy$	(2.13)
Прибуток: $P=Cy-I=(a_0+a_1y)y-b_0-b_1y-b_2y^2-b_3y^3$	(2.14)
Обмеження для оптимізаційної задачі: $x_1+x_2=1,\quad 0\le x_i\le 1,\ i=1,2$	(2.15)
Дохід на 1 грн. коштів вкладених в акції: $d=x_1E_1+x_2E_2$	(2.16)
Математичного очікування *d*: $M\{d\}=x_1R_1+x_2R_2$	(2.17)
Обмеження на *M{d}:* $x_1R_1+x_2R_2\ge c$	(2.18)
Обмеження на *d:* $d=x_1E_1+x_2E_2\ge c$	(2.19)
Мінімізація дисперсії *d:* $D\{d\}\to \min$	(2.20)
$D\{d\}=M\left\{(d-M\{d\})^2\right\}=x'Kx=\sigma_1^2x_1^2+2\sigma_{12}x_1x_2+\sigma_2^2x_2^2$	(2.21)

3. ТЕОРИЯ СПОЖИВАННЯ

Слабке відношення віддання переваги:

$$x \succ= y \tag{3.2}$$

Поняття байдужості. Набори товарів x і y байдужі для споживача:

$$x \sim y \text{, якщо і тільки якщо } x \succ= y \text{ і } y \prec= x \tag{3.3}$$

$$x \succ y \text{, якщо і тільки якщо } x \succ= y \text{, а відношення } y \succ= x \text{ невірно} \tag{3.4}$$

Досконале відношення:

$$\text{або } x \succ= y \text{, або } y \succ= x \text{, або (} x \succ= y \text{ и } y \succ= x \text{ одночасно)} \tag{3.5}$$

Відношення називається транзитивним відношенням, якщо, для будь-яких трьох наборів x, y і z із C виконується умова:

$$\text{якщо } x \succ= y,\ y \succ= z \text{, то } x \succ= z \tag{3.6}$$

Безліч байдужості для товару x:

$$I_x = \{y : y \sim x, x, y \in C\} \tag{3.7}$$

Множина, якій відається перевага:

$$P_x = \{y : y \succ= x, x \in C, y \in C\} \tag{3.8}$$

Множина, якій не відається перевага:

$$NP_x = \{y : x \succ= y, x \in C, y \in C\} \tag{3.9}$$

Формула (310) означає перетин множини якій віддається перевага з множиною якій не віддається неперевага.

$$I_x = P_x \bigcap NP_x. \tag{3.10}$$

Функція $U(x)$ називається функцією корисності. Для неї справедливо:

$$U(x) \geq U(y) \text{, якщо і тільки, якщо } x \succ= y. \tag{3.11}$$

Вважатимемо $U(x)$ такою, що диференціюється і такою, що градієнт функції $U(x)$ позитивний:

$$\nabla U(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial U}{\partial x_n} \end{bmatrix} > 0 \tag{3.12}$$

Аксіома строгої опуклості. Нехай x і y - різні набори товарів в C, причому $y \succ= x$, тоді

$$\alpha y + (1-\alpha)x \succ= x, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{3.13}$$

Опуклість множини для будь-якого речового a:

$$P_a = \{U(x) \ge a,\ x \in C\ \}, \tag{3.14}$$

Матриця Гессе:

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \cdots & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_n \partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} < 0 \tag{3.14a}$$

Першим законом Госсена:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} < 0, \quad i = \overline{1,n} \tag{3.15}$$

Позначимо I - грошовий дохід. Тоді бюджетне обмеження:

$$p'x \le I. \tag{3.16}$$

Задача максимізації строго вгнутої функції на опуклій множині:

$$\left.\begin{array}{l} U(x) \to \max, \\ p'x \le I,\ \ x \ge 0, \end{array}\right\} \tag{3.17}$$

де $U(x)$ - строго вгнута функція.

Згідно з теоремою Куна-Таккера, необхідні і достатні умови максимуму:

$$\left.\begin{array}{l} \nabla U(x) - \lambda p = O_n, \\ \lambda(I - p'x) = 0,\ \ \lambda \ge 0, \end{array}\right\} \tag{3.18}$$

де $\nabla U(x)$ - градієнт $U(x)$, λ - множник Лагранжа, O_n - нульовий n-мірний вектор

Оптимальний множник Лагранжа

$$\lambda^* = \frac{\partial U(x^*)}{\partial I} > 0 \tag{3.19}$$

називається граничною корисністю додаткового доходу

Рівняння функції попиту:

$$x_i^* = f_i(p_1, p_2, \ldots, p_n, I), \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.20}$$

Важлива властивість функцій попиту - їх однорідність нульової міри. Це означає, що

$$f(\lambda p, \lambda I) = \lambda^0 f(p, I) = f(p, I), \tag{3.21}$$

де $\lambda = const$.

Точці попиту x^* повинні задовольняти дві необхідні і достатні умови максимуму:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla U(x^*) - \lambda^* p = O_n, \\ &I - p' x^* = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

Чутливості x^* і граничної корисності λ^* до зміни цін і доходу вимірюватимемо за допомогою приватних похідних цих величин:

$$\left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1^*}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial x_1^*}{\partial p_n} \\ \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} & \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial x_2^*}{\partial p_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n^*}{\partial p_1} & \frac{\partial x_n^*}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial x_n^*}{\partial p_n} \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Розмірність матриці $n \times n$.

Чутливість λ^* до зміни цін визначається градієнтом λ^* за цінами:

$$\nabla_p \lambda^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_1} \\ \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_n} \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

З попереднього рівняння і диференціюючи (3.22) p та I отримуємо матричне рівняння:

$$\left[\begin{array}{c:c} 0 & -p' \\ -p' & H(x^*) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c:c:c} \frac{\partial \lambda^*}{\partial I} & \left(\nabla_p \lambda^*\right)' & \left(\nabla_p \lambda^*\right)'_{comp} \\ \hdashline \frac{\partial x^*}{\partial I} & \left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right] & \left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right]_{comp} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c} -1 & (x^*)' & O_{1n} \\ \hdashline O_{n1} & \lambda^* J_n & \lambda^* J_n \end{array}\right]. \tag{3.25}$$

де $H(x)$ - матриця других похідних $U(x)$.

В (3.25) невідомими виступають наступні величини: $$\left.\begin{array}{l} \text{матриці розміру } (n\times n):\ \left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right],\quad \left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right]_{comp}, \\ \text{вектори розміру } (n\times 1):\ \frac{\partial x^*}{\partial I},\ \left(\nabla_p \lambda^*\right)_{comp},\ \nabla_p \lambda^*, \\ \text{скаляр}:\ \frac{\partial \lambda^*}{\partial I}. \end{array}\right\}$$	(3.26)
З рішення перетвореного рівняння (3.25) виходить рівняння Слуцького: $$\left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right] = \left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right]_{comp} - \frac{\partial x^*}{\partial I}(x^*)'.$$	(3.27)
Звідси для кожного товару і ціни маємо $$\left[\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right] = \left[\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right]_{comp} - \frac{\partial x_j^*}{\partial I} x_i^*,\ i, j = 1,2,\cdots,n,$$	(3.28)
Матриця $\left[\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right]_{comp}$ знаходиться з наступної системи рівнянь, $$\left.\begin{array}{l} \left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right]_{comp} P = 0_n,\ n\times 1, \\ -P\left(\nabla_p \lambda^*\right)'_{comp} + H\left[\frac{\partial x^*}{\partial p}\right]_{comp} \lambda^* J_n,\ n\times n \end{array}\right\}$$	(3.29)
Компенсоване зростання ціни товару приводить до зменшення попиту на нього: $$\left[\frac{\partial x_i^*}{\partial pi}\right]_{comp} < 0,\quad i = \overline{1,n}.$$	(3.30)
4. ТЕОРІЯ ВИРОБНИЦТВА	
Вектор ресурсів: $$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$	(4.1)

Виробнича функція:

$$q = f(x) \tag{4.2}$$

Дві аксіоми для моделі виробництва.

Аксіома 1.

$$x^{(1)} \ge x^{(2)} (x^{(1)}, x^{(2)} \in E) \Rightarrow f(x^{(1)}) \ge f(x^{(2)}), \tag{4.3}$$

де $x^{(1)}, x^{(2)}$ - точки в економічній області E, причому

$$\nabla f(x) \ge 0_n, \quad x \in E \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \ge 0, \quad j = \overline{1, n} \tag{4.5}$$

Аксіома 2. співвідношення:

$$H(x) < 0, \ x \in \Omega. \tag{4.6}$$

Закон убуваючої віддачі:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j^2} < 0, \ j = \overline{1, n} \tag{4.7}$$

Особлива область:

$$R = \{x : \nabla f(x) \ge 0_n, \quad H(x) < 0, \quad x \in E\}, \tag{4.8}$$

Еластичність функції $f(x), \quad x \in R^n$, що диференціюється, по i -ій змінній:

$$e_i(x) = \frac{\partial f(x) \cdot x_i}{\partial x_i \cdot f(x)} = \frac{\partial f(x)}{f(x) \cdot \frac{\partial x_i}{x_i}} \tag{4.9}$$

Лінійна функція:

$$q = a_1 x_1 + a_2 x_2, \tag{4.10}$$

де a_1, a_2 - коефіцієнти, x_1, x_2 - об'єми ресурсів.

Прибуток:

$$\Pi = D - C, \tag{4.11}$$

де $D,$ - річний дохід, C - витрати виробництва (витрати, собівартість).

Маємо

$$D = pq = pf(x) \tag{4.12}$$

$$\tilde{N} = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i = w' x \tag{4.13}$$

Довгострокова задача планування:

$$\left. \begin{aligned} \Pi = pf(x) - w'x \to \max, \\ x \ge O_n \end{aligned} \right\} \tag{4.14}$$

Обмеження на ресурси для короткострокової задачі планування: $$g(x) \le b,$$ де $g(x)$ - т-мірна функція $x \in R^n$, $b \in R^m$.	(4.15)
Короткострокова задача планування роботи фірми при відомих $g(x)$ і b: $$\left.\begin{aligned} \Pi(x) = pf(x) - w'x \to \max, \\ g(x) \le b, \\ x \ge 0_n \end{aligned}\right\}$$	(4.16)
Рішення задачі нелінійного програмування (функція параметрів - цін p і w): $$x^* = \varphi(p,w) \in R^n$$	(4.17)
Функція попиту на ресурси: $$x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \dots \\ x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(p,w) \\ \varphi_2(p,w) \\ \dots \\ \varphi_n(p,w) \end{bmatrix} = \varphi(p,w)$$	(4.18)
Функція пропозиції випуску: $$q^* = f(x^*) = f(\varphi(p,w))$$	(4.19)
Монополіст впливає на ціну продукції шляхом варіювання випуску продукції. $$p = p(q)$$	(4.20)
У загальному випадку фірма може понизити ціну, щоб продати більше продукції, тому: $$\frac{dp}{dq} < 0$$	(4.21)
Загальний дохід згідно (4.12): $$D(q) = p(q) \cdot q$$	(4.22)
Задача фірми в умовах недосконалої конкуренції: $$\left.\begin{aligned} p(q)q - \sum_{j=1}^{n} w_j(x_j)x_j \to \max, \\ q = f(x_1,\dots,x_n), \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \end{aligned}\right\}$$	(4.23)

Необхідні умови максимуму: $$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial q} = p(q) + \frac{dp(q)}{dq} q - \lambda = 0, \\ &\frac{\partial L}{\partial x_j} = -w_j(x_j) - \frac{\partial w_j(x_j)}{\partial x_j} x_j + \lambda \frac{\partial f(x_1, x_2 \ldots, x_n)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1,n}, \\ &q = f(x_1, x_2 \ldots, x_n), \\ &x_j \geq 0, \;\; j = \overline{1,n}. \end{aligned}\right\}$$	(4.24)
При оптимальному доході для монополіста граничний дохід по j-му ресурсу $\frac{dD(q^*)}{dx_j}$ ($j = 1, \ldots, n$) дорівнює граничній вартості цього ресурсу: $$\frac{dD(q^*)}{dx_j} = \frac{dC_j(x_j^*)}{dx_j}, \;\; j = 1, \ldots, n.$$	(4.25)
У разі двох конкурентів кожен виробляє продукцію відповідно до виробничої функції: $$q_1 = f(x_1), \quad q_2 = f(x_2),$$ де x_1, x_2 - n-мірні вектори витрат.	(4.26)
Ціна продукції залежить від q_1, q_2: $$p = p(q_1, q_2)$$	(4.27)
У дуополії існує тільки два продавці товару, його загальний випуск: $$q = q_1 + q_2$$	(4.28)
Нехай ціна на продукцію залежить лінійно від її кількості: $$p = a - b(q_1 + q_2), \; a > 0, \; b > 0 .$$	(4.29)
Загальну вартість витрат ресурсів (витрати виробництва) кожною фірмою вважатимемо лінійною функцією випуску. Тоді $$c_1 = cq_1 + d, \quad c_2 = cq_2 + d, \quad c > 0, \quad d > 0,$$	(4.30)
Прибуток і-ої фірми має бути максимальним: $$\Pi_i = \left[a - b(q_1 + q_2)\right] q_i - cq_i - d \rightarrow \max, \quad i = 1,2.$$	(4.31)
Необхідна умова максимуму для обох задач в (4.31): $$\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i} = \left[a - b(q_1 + q_2)\right] - bq_i - b\frac{\partial q_j}{\partial q_i} q_1 - c = 0, \quad i, j = 1,2 \quad i \neq j$$ де $\frac{\partial q_j}{\partial q_i}$ - вплив випуску продукції і-ої фірми на випуск продукції j-ої фірми.	(4.32)

Тоді стратегія Курно полягає в рішенні завдань (4.32) для $\frac{\partial q_j}{\partial q_i} = 0$:

$$a - b(q_1 + q_2) - bq_i - c = 0, \quad i = 1{,}2 \tag{4.33}$$

$$\left.\begin{aligned} a - b(q_1 + q_2) - bq_1 - c = 0, \\ a - b(q_1 + q_2) - bq_2 - c = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

$$bq_2 - bq_1 = 0, \quad q_1 = q_2 \tag{4.35}$$

Рівновага Курно:

$$q_1 = q_2 = \frac{a - c}{3b} \tag{4.36}$$

Ціна на продукцію і її загальний випуск обома фірмами:

$$p = \frac{a + 2c}{3}, \quad q = \frac{2(a - c)}{3b} \tag{4.37}$$

Узагальнена ціна на продукцію і її загальний випуск на випадок N фірм:

$$\left.\begin{aligned} q_i = \frac{a - c}{(N+1)b}, \quad i = \overline{1, N}, \\ p = \frac{a + Nc}{N+1}, \quad q = \frac{N}{N+1} \cdot \frac{(a - c)}{b}. \end{aligned}\right\} \tag{4.38}$$

Обсяг виробництва першої фірми:

$$q_1(t+1) = \frac{a - c - bq_2(t)}{2b} \tag{4.39а}$$

Обсяг виробництва другої фірми:

$$q_2(t+1) = \frac{a - c - bq_1(t)}{2b} \tag{4.39б}$$

Лінійне різницеве рівнянням другого порядку:

$$q_1(t+2) - \frac{1}{4} q_1(t) = \frac{a - c}{4b} \tag{4.40}$$

Якщо фірма 2 насправді не враховуватиме впливи фірми 1 на її виробництво, то її випуск визначатиметься по формулі:

$$q_2 = \frac{a - c - bq_1}{2b} \tag{4.41}$$

Отримуємо:

$$q_1 = \frac{a - c - bq_2}{(3/2)b} \tag{4.42}$$

Рівновага Стекельберга:

$$q_1 = \frac{a-c}{2b} \quad (4.43)$$

$$q_2 = \frac{a-c}{4b} \quad (4.44)$$

Нерівновага Стекельберга:

$$q_1 = q_2 = \frac{a-c}{(5/2)b} \quad (4.47)$$

Загальний прибуток:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \left[a - b(q_1 + q_2)\right] \cdot (q_1 + q_2) - c(q_1 + q_2) - 2d \quad (4.48)$$

Виробничі функцій:

$$q_i = A_i x_1^{\alpha_i} x_2^{\beta_i} x_3^{\gamma_i}, \; i = 1{,}2,$$

де q_i - об'єм випуску i -го виду продукції, $i = 1{,}2$; x_j - кількість сировини j -го виду, $j = 1{,}2{,}3.$ (4.49)

5. МІЖГАЛУЗЕВИЙ БАЛАНС

Рівняння Леонтьева:

$$x = Ax + c \quad (5.1)$$

Основне припущення відносно цін при дослідженні моделі Неймана:

$$P_{(t+1)}B_j - P_{(t)}A_j \le 0, \;\; j = 1, \ldots, m; \quad t = 1, \ldots, T-1$$

або

$$P_{(t)}A \ge P_{(t+1)}B, \quad t = 1, \ldots, T-1 \quad (5.2)$$

Припущення про те, що загальна маса грошей не змінюється і постійно є в обігу:

$$P_{(t)}AZ^{(t)} = P_{(t+1)}BZ^{(t)}, t = 1, \ldots T-1 \quad (5.3)$$

Умови для стану динамічної рівноваги моделі Неймана:

$$\lambda AZ \le BZ$$

$$\lambda PA \ge PB$$

$$\lambda PAZ = PBZ. \quad (5.5)$$

Властивості динамічної рівноваги:

1) $PBZ > 0$;
2) $\lambda a_k Z < b_k Z \to p^k = 0$;
3) $\lambda P_j A > P_j B \to z_j = 0$; (5.6)

6. ОДНОСЕКТОРНА МОДЕЛЬ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ (ДИСКРЕТНИЙ АНАЛОГ МОДЕЛІ СОЛОУ)

Об'єм кінцевого продукту у вигляді виробничої функції: $$Y_t = F(K_t, L_t)$$	(6.1)
Об'єм кінцевого продукту: $$Y_t = C_t + S_t$$	(6.2)
Фонд накопичення представляє частину кінцевого продукту: $$S_t = sY_t$$ де $s = const$, - норма накопичення, $0 < s < 1$.	(6.3)
Фонд накопичення дорівнює: $$S_t = K_{t+1} - K_t + \mu K_t,\ 0 < \mu < 1,\ \mu = const$$	(6.4)
Рівняння динаміки робочої сили отримаємо, виходячи з умови, що приріст робочої сили пропорційний її об'єму: $$L_{t+1} - L_t = gL_t, \quad g = const$$	(6.5)
Виробничі функції лінійно однорідні при усіх $K_t,\ L_t$: $$Y_t = F(K_t L_t) = L_t f(k_t),$$ де $k_t = \dfrac{K_t}{L_t}$ - фондоозброєність праці.	(6.6)
Різницеве рівняння для опису зміни k_t в часі має наступний вигляд: $$(1+g)k_{t+1} + (\mu - 1)k_t = sf(k_t)$$	(6.7)
Нехай $k_t = k^*$ для $t \geq 0$. З цієї умови і різницевого рівняння (6.6) отримуємо рівняння для визначення k^* $$\eta k = sf(k),$$ де $\eta = g + \mu$.	(6.8)
Об'єм трудових ресурсів: $$L_{t+1} = L_0(1+g)^t,\ t = 0, 1, 2,$$ де L_0 - об'єм трудових ресурсів в початковий момент часу.	(6.9)
Об'єм основних фондів: $$K_{t+1} = K_0(1+g)^t,$$ де K_0 - об'єм основних фондів в початковий момент часу.	(6.10)
Задача оптимізації споживання на одного працюючого с: $$c = f(k^*(s)) - \eta k^*(s) \to \max$$	(6.12)

Необхідна умова максимуму: $$\frac{dc}{ds}=0\,. \qquad (6.13)$$
Залежить фондоозброєності від норми накопичення: $$\frac{df(k^*(s))}{dk^*}-\eta=0 \qquad (6.14)$$
Оптимальне значення норми накопичення: $$\tilde{s}=\frac{\eta k^*}{f(k^*)}=\frac{\frac{df(k^*(\tilde{s}))\tilde{k}}{dk^*}}{f(k^*(\tilde{s}))} \qquad (6.15)$$ де $k^*(\tilde{s})=\tilde{k}$.
Еластичність функції: $$Э_{x_i}^f=\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\cdot\frac{x_i}{f(x)}\,. \qquad (6.16)$$

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Мур Дж., Уэдерфорд Л. Экономическое моделирование в Microsoft Excel. М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 1024 с.
2. Корхин А.С., Минакова Е.П. Компьютерная статистика, Часть 1. Д.: НГУ, 2008. – 150 с.
3. Корхін А.С., Турчанінова І.Ю. Моделювання економіки. Методичні вказівки до лабораторних робіт [Електронний ресурс] /А. С. Корхін, І. Ю. Турчанінова. – Д.: Національний гірничий університет, 2015. – 45 с. – Режим доступу: http://ir.nmu.org.ua/handle/123456789/149849
4. Иванилов Ю.П. Математические методы в экономике: учебное пособие для студ. Вузов./ М.: Наука, 1979-303с.
5. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе. М., Юнити, 2000.
6. Малыхин В.И. Математическое моделирование экономики: Учеб.-практ. пособие. – М.: Изд-во УРАО, 1998. – 160 с.
7. Демиденко М.А. Підвищення прибутковості електронної комерції з використанням моделей спліт аналізу. /“Проблеми і перспективи інноваційного розвитку економіки України” – Дніпропетровськ: НГУ, 2014.
8. Стандарт вищої освіти Національного гірничого університету. СВО НГУ ОНП–10. Організація навчального процессу за кредитно–трансферною системою [Текст] / Уклад.: В.О. Салов, Г.Я.Корсунський, Т.О. Письменкова, Т.Г. Ніколаєва, В.О. Салова.– Дніпропетровськ: НГУ, 2010 .– 20 с.

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ

Виконуються відповідно до стандарту ДСТУ 3008 – 95. Документація. Звіти у сфері науки і техніки. Структура і правила оформлення.

В описі вирішення кожного завдання повинні бути чітко виділені чотири складові частини:

- порядковий номер, який відповідає номеру варіанта,
- постанову завдання,
- його рішення і аналіз,
- відповідь.

Послідовність розрахунків кожного завдання в звіті задається її порядковим номером і повинна строго відповідати послідовності завдань.

Рішення, як правило, має складатися з двох частин:

1) хід розрахунків рішення в загальному вигляді як послідовність міркувань і формул;

2) розрахунки за вихідними даними, з використанням надбудов та вбудованих функцій електронних таблиць.

Відповідь залежно від формулювання завдання може бути числом, графіком або рівнянням (формулою).

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Оцінювання рівня знань здійснюють за загальними критеріями, представленими у таблиці.

Таблиця – Загальні критерії оцінювання рівня знань

Рівень знань	Оцінка, в балах	Критерії
відмінний	5	• демонстрація всебічного, системного і глибокого знання програмного матеріалу; • засвоєння інформації з лекційного курсу і лабораторного практикуму, а також знайомство з основною і додатковою літературою; • чітке володіння понятійним апаратом, методами та інструментарієм, передбаченими навчальною програмою; • загальна та професійна грамотність, лаконізм і логічна послідовність викладу матеріалу.
добрий	4	• демонстрація знань основного програмного матеріалу; • засвоєння інформації з лекційного курсу і лабораторного практикуму; • достатнє володіння основним понятійним апаратом, методами та інструментарієм, передбаченими навчальною програмою; • вміння використовувати знання для вирішення типових ситуацій, допускаючи окремі непринципові помилки.
задовільний	3	• демонстрація знань основного програмного матеріалу; • неповне засвоєння інформації з лекційного курсу; • достатнє володіння основним понятійним апаратом, методами та інструментарієм, передбаченими навчальною програмою; • недостатнє вміння використовувати їх для вирішення типових ситуацій, допускаючи окремі досить серйозні помилки.
незадовільний	2	• демонстрація значних прогалин у знаннях основного програмного матеріалу; • володіння окремими поняттями, методами і інструментарієм, допускаючи при їх використанні принципові помилки; • відсутність правильних відповідей на питання.

Навчальне видання

Корхін Арнольд Самуілович
Турчанінова Інна Юріївна

МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІКИ
Навчальний посібник

Редактор

Підписано до видання
Електронний ресурс. Авт. арк. 2,5.

Підготовлено до друку та видано
у Державному вищому навчальному закладі
«Національний гірничий університет».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842.
49600, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.